Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2023/2024

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

7. Übungsblatt – 28. November 2023

Beispiel 28 **(2 Punkte)**

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, die die Werte -1, 0 und 1 annehmen kann. Gegeben sei $\mathbb{P}[X=1] = \mathbb{P}[X=-1] = p$ für ein $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{P}[X=0]$.

(b) Bestimmen Sie die möglichen Werte der Konstanten $c > 0$, sodass $\mathbb{E}(c^X) = 1 + \frac{p}{2}$.

Beispiel 29 **(2 Punkte)**

Eine stetige Zufallsvariable X sei für a, $b \in \mathbb{R}$ gegeben durch ihre Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ bx & \text{für } x \in (0,1], \\ a - \frac{b}{x} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie a und b, sodass $F_X(x)$ tatsächlich die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable ist.

(b) Finden Sie eine dazugehörige Dichtefunktion $f_X(x)$ und stellen Sie $f_X(x)$ und $F_X(x)$ graphisch dar.

(c) Zeigen Sie, dass X keinen Erwartungswert besitzt.

(d) Berechnen Sie $\mathbb{P}[0 \leq X < 5]$.

Beispiel 30 **(2 Punkte)**

(a) Es sei eine stetige Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion $F_X(x)$ gegeben. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Y = \alpha X + \beta$ mit α, $\beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq 0$.

(b) Was ändert sich, wenn X nicht stetig ist?

(c) Es sei X die Zufallsvariable aus **Beispiel 29** und $Y = -3X + 5$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y.

(d) Besitzt Y einen Erwartungswert?

Beispiel 31 **(2 Punkte)**

Es sei eine Zufallsvariable X mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = 3$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}\Big((2X-3)^2\Big) \geq 9$.

(b) Es sei $\mathbb{E}\Big((2X-3)^2\Big) = 13$. Berechnen Sie die Varianz von X, $\mathbb{E}\Big((2-X)^2\Big)$ und $\operatorname{Var}(2X+3)$.

Beispiel 32 **(2 Punkte)**

Für $\lambda > 0$ sei eine stetige Zufallsvariable X gegeben durch

$$\mathbb{P}[X \geq x] = \frac{(x+\lambda+1)e^{-\frac{x}{\lambda}}}{\lambda+1} \quad \text{für } x \geq 0\,.$$

(a) Bestimmen Sie eine Dichte von X.

(b) Zeigen Sie, für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_0^\infty x^k e^{-\frac{x}{\lambda}} = k!\,\lambda^{k+1}.$$

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.