

Beispiel 33

(2 Punkte)

Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern n und p , das heißt $X \sim B(n, p)$. Zeigen Sie die folgende Gleichheit:

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

Beispiel 34

(2 Punkte)

Im Paradiesdorf verkehrt ein Zug pro Minute und im Durchschnitt hat nur jeder zweihundertste Zug Verspätung. Wenn wir davon ausgehen, dass die Züge sich nicht gegenseitig beeinflussen, ist die Anzahl an verspäteten Zügen in einem halben Tag (12 Stunden) eine Binomialverteilung X .

- Bestimmen Sie die Erwartung und die Varianz von X .
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens fünf Züge in einem halben Tag verspätet sind.
- Approximieren Sie X mit einer Poisson-Verteilung Y und bestimmen Sie die Erwartung und die Varianz von Y .
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit aus (b) näherungsweise mit der Verteilung Y .

Beispiel 35

(2 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei stetig gleichverteilt auf dem offenen Intervall $(0, 1)$.

- Bestimmen Sie $\mathbb{P}[X \geq x]$ für $x \in (0, 1)$.
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $Y = -\ln(X)$.
- Welche Verteilung hat Y ?
- Ermitteln Sie die Erwartung und die Varianz von Y .

Beispiel 36

(2 Punkte)

Bei einer Lieferung von Obstkisten sind immer wieder Kisten mit verdorbenem Obst dabei. Wir nehmen an, dass die Dauer, bis eine Kiste verdorbenes Obst enthält, in den ersten fünf Wochen exponentialverteilt ist. Im Schnitt sind bei einer Kiste drei Wochen nach dem Befüllen die ersten Früchte verdorben und wir gehen davon aus, dass Kisten unabhängig voneinander verdorbenes Obst enthalten. Eine Lieferung mit vierzig Kisten erreicht drei Tage nach dem Befüllen den Supermarkt.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass maximal eine Kiste verdorbenes Obst enthält?
- Wie verändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn vom Befüllen bis zur Auslieferung zum Supermarkt eine Woche vergeht?
- Der Produzent verdient pro Kiste mit unverdorbenem Obst zehn Euro, muss aber für jede Kiste mit verdorbenem Obst eine Strafe von fünf Euro zahlen. Wie groß ist die erwartete Einnahme des Herstellers bei einer Lieferung von sechzig Kisten, die drei Tage nach dem Befüllen den Supermarkt erreichen? Wie verändert sich der Gewinn bei einer Lieferzeit von einer Woche?