Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2023/2024

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

9. Übungsblatt – 12. Dezember 2023

Beispiel 37 **(2 Punkte)**

Sei X standardnormalverteilt. Zeigen Sie die folgenden Identitäten für $x > 0$:

(a) $\mathbb{P}[X > x] = \mathbb{P}[X < -x]$.

(b) $\mathbb{P}[|X| > x] = 2\,\mathbb{P}[X > x]$.

(c) $\mathbb{P}[|X| < x] = 2\,\mathbb{P}[X < x] - 1$.

Beispiel 38 **(je 2 Punkte für a + b + c und d + e)**

In einer Molkerei werden Glasflaschen mit Milch befüllt. Die Füllmenge M einer zufällig ausgewählten Flasche sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 1$ Liter und $\sigma = 30$ Milliliter, wobei die Sollmenge dem Durchschnittswert entspricht.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Flasche mindestens vierzig Milliliter weniger als die Sollmenge enthält?

(b) Bestimmen Sie $c > 0$, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von genau 90% die Füllmenge einer zufällig ausgewählten Flasche maximal c Milliliter von der Sollmenge abweicht.

(c) Eine Kiste enthält sechzehn Milchflaschen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der Kiste maximal zwei Flaschen befinden, die mindestens vierzig Milliliter weniger als die Sollmenge enthalten?

(d) Wie muss die Abfüllanlage eingestellt werden (d.h. wie muss die mittlere Füllmenge geändert werden), damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% eine zufällig ausgewählte Milchflasche höchstens vierzig Milliliter weniger als die Sollmenge enthält?

(e) Wie muss sich die Genauigkeit der Füllablage verbessern (d.h. wie groß darf die Standardabweichung höchstens sein), damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% eine zufällig ausgewählte Milchflasche höchstens vierzig Milliliter weniger als die Sollmenge enthält?

Beispiel 39 **(2 Punkte)**

Bei einer Impfstoffstudie wurden (etwa) 43 500 Personen geimpft, wobei (um die) 39 000 davon den Impfstoff erhalten haben. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufällig ausgewählten Gruppe von hundert Testpersonen maximal zehn nicht den Impfstoff erhalten haben. Berechnen Sie p

(a) genau.

(b) näherungsweise durch Approximation mit der Binomialverteilung.

(c) näherungsweise durch Approximation der Binomialverteilung aus (b) mit der Poisson-Verteilung.

(d) näherungsweise durch Approximation der Binomialverteilung aus (b) mit einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Verwenden Sie hierfür

$$\mu = nq \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{nq(1-q)},$$

wobei q die Erfolgswahrscheinlichkeit der Binomialverteilung und n die Anzahl an Durchführungen bezeichnet, d.h. die Verteilung in (b) ist $B(n, q)$.

Anmerkung: In (a), (b) und (c) ist es ausreichend, eine Formel aufzustellen und die Werte mithilfe eines Computeralgebrasystems auszurechnen (z.B. Mathematica von Wolfram Alpha).

Beispiel 40 **(2 Punkte)**

Sei X eine Gamma-verteilte Zufallsvariable mit Gestaltsparameter $a = n \in \mathbb{N}$ und Skalierungsparameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie für $x > 0$,

$$F_X(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}.$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.