Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2023/2024

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

10. Übungsblatt – 9. Jänner 2024

Beispiel 41 **(2 Punkte)**

Sei (X, Y) ein diskreter zweidimensionaler Zufallsvektor, wobei X die Werte -1, 0, 1 und Y die Werte 0, 1 annehmen kann. Folgende Wahrscheinlichkeiten bzw. Verhältnisse sind bekannt:

$$\mathbb{P}[X = 1, Y = 0] = 0.1, \qquad \mathbb{P}[X = -1] = 0.3,$$
$$\mathbb{P}[X = 1, Y = 1] = 0, \qquad \mathbb{P}[Y = 0] \quad = 0.5,$$
$$\mathbb{P}[X = 0, Y = 0] = 3\,\mathbb{P}[X = -1, Y = 0].$$

(a) Bestimmen Sie die vollständige Wahrscheinlichkeitstabelle des Zufallsvektors (X, Y), d.h. inklusive der Wahrscheinlichkeitsfunktionen und der Verteilungsfunktionen von X und Y.

(b) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

(c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable $Z = X \cdot Y$.

(d) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Z.

Beispiel 42 **(je 2 Punkte für a + b + c und d + e + f)**

Wir werfen zwei faire sechsseitige Würfel, die allerdings nicht die Zahlen von 1 bis 6 auf den Seitenflächen haben. Der erste besitzt die Augenzahlen 1, 1, 2, 3, 3, 4 und der zweite Würfel hat die Augenzahlen 1, 2, 2, 2, 3, 3. Sei X die resultierende Augenzahl des ersten Würfels und Y die resultierende Augenzahl des zweiten Würfels.

(a) Bestimmen Sie die vollständige Wahrscheinlichkeitstabelle des Zufallsvektors (X, Y), d.h. inklusive der Wahrscheinlichkeitsfunktionen und der Verteilungsfunktionen von X und Y.

(b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X und Y.

(c) Bestimmen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von X und Y (siehe Seite 80/81 im Skriptum).

(d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable $Z = X + Y$.

(e) Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von Z.

(f) Wir spielen folgendes Spiel: Falls Z kleiner oder gleich drei ist, verlieren Sie drei Euro, falls Z gleich vier ist, gewinnen Sie zwei Euro und in allen anderen Fällen gewinnen Sie einen Euro.

  (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen Sie ein Spiel?

  (ii) Berechnen Sie die erwartete Bilanz eines Spiels.

Beispiel 43 **(je 2 Punkte für a + b + c und d + e + f)**

Sei (X, Y) ein stetiger zweidimensionaler Zufallsvektor mit der folgenden Dichtefunktion:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} kxy & \text{wenn } x, y \in [0, 1] \text{ und } 0 \leq x + y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $k > 0$ ist.

(a) Zeichnen Sie den Bereich in $\mathbb{R}^2$, in dem $f_{X,Y}(x, y) > 0$.

(b) Bestimmen Sie den Wert von k, sodass $f_{X,Y}(x, y)$ wirklich eine Dichtefunktion ist.

(c) Berechnen Sie die Randdichten und Randverteilungen von X und Y.

(d) Sind X und Y unabhängig?

(e) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X und Y.

(f) Berechnen Sie $\mathbb{P}[X > Y]$, $\mathbb{P}[Y > X]$ und $\mathbb{P}[3X < Y]$.
Hinweis: Bei (f) können Sie verwenden, dass

$$\mathbb{P}[X > Y] = \int_A f_{X,Y}(x, y)dxdy,$$

wobei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$.