

11. Übungsblatt – 16. Jänner 2024

Beispiel 44

(2 Punkte für a + b + c und d + e + f)

Sei (X, Y) ein stetiger zweidimensionaler Zufallsvektor mit folgender Dichtefunktion:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} ky^2 & \text{wenn } -1 < y < 0 \leq x \leq 1, \\ kxy & \text{wenn } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $k > 0$ eine (vorerst) unbestimmte Konstante ist.

- (a) Skizzieren Sie den Bereich in \mathbb{R}^2 , in dem $f_{X,Y}(x, y) > 0$.
- (b) Bestimmen Sie die Konstante k , sodass $f_{X,Y}(x, y)$ wirklich eine Dichtefunktion ist.
- (c) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y .

Hinweis: Verwenden Sie Teil (a) um den jeweils relevanten Integrationsbereich zu identifizieren.

- (d) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert von X und Y .
- (e) Bestimmen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von X und Y .
- (f) Berechnen Sie $\mathbb{P}[Y^2 > X]$.

Beispiel 45

(2 Punkte)

Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ und $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:

- (a) $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$.
- (b) $\text{Cov}(aX + b, Y) = a \text{Cov}(X, Y)$.
- (c) Wenn $a \neq 0$, dann gilt $\rho(aX + b, Y) = \frac{a}{|a|} \rho(X, Y)$.

Beispiel 46

(2 Punkte)

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit $-\infty < \mathbb{E}(X^n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die symmetrisch um 0 ist, d.h. die Dichte f_X erfüllt $f_X(x) = f_X(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(X^k) = 0$ wenn k ungerade ist. Folgern Sie daraus, dass $\text{Cov}(X, X^2) = 0$, obwohl X und X^2 offensichtlich nicht unabhängig sind.
- (b) Geben Sie eine konkrete Verteilung an, die die beschriebene Eigenschaft besitzt.

Beispiel 47

(2 Punkte)

Seien X_1, X_2, \dots unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit demselben Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$X_1 + \dots + X_n \sim \gamma(n, \lambda).$$

Hinweis: Verwenden Sie im Induktionsschritt den Faltungssatz für Wahrscheinlichkeitsdichten.