Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse WS 2023/2024

Institut für Diskrete Mathematik (5050), TU Graz

12. Übungsblatt – 23. Jänner 2024

Beispiel 48 **(2 Punkte)**

Seien X und Y unabhängig exponentialverteilt mit den Parametern $\lambda > 0$ und $\mu > 0$, wobei $\lambda \neq \mu$, das heißt,

$$X \sim Exp(\lambda) \quad \text{und} \quad Y \sim Exp(\mu).$$

Finden Sie die Verteilungsfunktion von $Z = X + Y$.

Beispiel 49 **(2 Punkte)**

Die Anzahl der Fahrzeuge, die eine Fabrik in einem Tag produziert, ist eine Zufallsvariable A mit Erwartungswert 50 und Varianz 25.

(a) Verwenden Sie die Markov-Ungleichung um die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, dass in einem Tag weniger als dreißig Fahrzeuge produziert werden.

(b) Verwenden Sie die Tschebyschev-Ungleichung um die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, dass die Anzahl der an einem Tag produzierten Fahrzeuge zwischen vierzig und sechzig liegt.

Beispiel 50 **(2 Punkte)**

Eine Maschine benötigt für ihre Funktion ein Bauteil, das sofort ersetzt werden muss, wenn die Abnützung zu groß ist. Die Dauer, die ein Bauteil verwendet werden kann, ist eine exponentialverteilte Zufallsvariable T mit Parameter $\lambda = 0.3$ pro Tag. Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Anzahl der Ersatzbauteile, die vorrätig sein müssen, damit die Maschine zu 95% zweitausend Tage betrieben werden kann.

Beispiel 51 **(2 Punkte)**

Vor kurzem wurde bekannt, dass die theoretische Grundlage zur Entwicklung eines Impfstoffes gegen das Epstein-Barr Virus geschaffen wurde[1]. Nehmen wir an, es wird eine Studie mit 40000 Probanten durchgeführt und der Impfstoff hat einen Wirkungsgrad von 90%. Wir nehmen weiters an, dass jeder der Probanten im Laufe der nächsten Jahre mit dem Virus in Kontakt kommt. Sei X die Anzahl der Personen, die im Laufe der Studie eine EBV Infektion bekommen. Berechnen Sie näherungsweise ein symmetrisches Intervall um die erwartete Anzahl erkrankter Personen, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass X in diesem Intervall liegt, 99% beträgt.

Beispiel 52 **(2 Punkte)**

Frau Schmerzliebhaber besucht ihre Ärztin im Durchschnitt neun Mal pro Monat. Die Anzahl der Besuche sei durch einen homogenen Poisson-Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$ modelliert, wobei $t = 1$ einem Monat entspricht und $t = 0$ dem Beginn des Jahres.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

  (i) in den ersten zwei Monaten genau 18 Besuche stattfinden? Vereinfachen Sie die Berechnung mit Hilfe der Stirlingformel: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

  (ii) in den ersten zwei Monaten mehr als zehn Besuche stattfinden, wenn im ersten Monat sechs Besuche stattfinden?

(b) Wie viele Besuche sind in den ersten zweihundert Tagen zu erwarten? (Wir nehmen vereinfacht an, dass jeder Monat dreißig Tage hat.)

---

[1] Siehe dazu: https://www.derstandard.at/story/3000000182171/fortschritte-bei-impfung-gegen-epstein-barr-virus