Übungen zu **Stochastische Prozesse**

Exercises in **Stochastic Processes**

Prof. Wolfgang Woess, WS 2015/16

English version on the last pages !

Im Folgenden ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

1.) Borell-Cantelli Lemma (Auffrischung)
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen in (=Elementen von) $\mathcal{A}$.
(a) [2 Punkte] Beweisen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}\big(\limsup A_n\big) = 0\,,$$

wobei $\limsup A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ist in undenlichen vielen } A_n \text{ enthalten}\}$.
(b) [3 Punkte] Zeigen Sie: wenn die A_n unabhängig sind, so gilt

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \iff \mathbb{P}\big(\limsup A_n\big) = 0$$

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty \iff \mathbb{P}\big(\limsup A_n\big) = 1$$

Hinweis: für die "fehlende" Beweis-Richtung gehen Sie zu den Komplementen über, und verwenden Sie die Ungleichung $1 + x \le e^x$ für relles x.

2.) [3 Punkte] Erinnern Sie sich an die Regel von der totalen Wahrscheinlichkeit und die Formel von Bayes:
Seien I eine endliche oder abzählbare Indexmenge und $B_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $\Omega = \bigcup_{i\in I} B_i$. Dann gilt für jedes $A \in \mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\,\mathbb{P}(B_i).$$

Weiters

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}A}\,.$$

Urne I enthält 7 rote und 3 weiße Kugeln. Urne II enthält 6 rote und 3 weiße Kugeln. Wir führen das folgende Zufallsexperiment durch: zuerst transferieren wir eine zufällig ausgewählte Kugel aus Urne I in Urne II. Dann entnehmen wir eine zufällige Kugel aus Urne II.

(a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die aus Urne II entnommene Kugel rot ist ?

(b) Nehmen wir an, daß wir aus Urne II eine weiße Kugel entnomme haben. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die aus Urne I nach Urne II transferierte Kugel weiß war ?

3.) [3 Punkte] Betrachten Sie das Beispiel der Irrfahrt des Betrunkenen mit Zustandsraum $\{0, 1, \ldots, N\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(0,0) = p(N,N) = 1\,, \quad p(k,k+1) = p\,,\; p(k,k-1) = 1-p(=:q) \;\text{ für }\; k \in \{1,\ldots,N-1\}\,.$$

Bestimmen Sie für $k = 0, \ldots, N$ die Wahrscheinlichkeit

$$F(k,0) = \mathbb{P}[\text{Absorption in } 0 \mid \text{Start in } k\,]$$

Hinweis: erstellen Sie eine lineare Rekursion für $F(k,0)$ und lösen Sie diese. [Falls Ihnen die Methode zur Lösung linearer Rekursionen mit konstanten Koeffizienten nicht bekannt ist, kontaktieren Sie KollegInnen oder W. Woess.]

4.) [2 Punkte] Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable. Zeigen Sie: wenn X ganzzahlige Werte hat, so ist der Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \ge n]\,,$$

und wenn X beliebig rellewertig ist, so ist

$$\mathbb{E}(X) < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \ge n] < \infty.$$

5.) [3 Punkte] Exponential- und Gammaverteilung (Auffrischung). Erinnerung: sind X und Y zwei *unabhängige* reelle Zufallsvariable mit Dichtefunktionen (bezüglich dem Lebesgue-Maß) f_X und f_Y, so ist die Dichtefunktion von $X+Y$ gegeben durch die *Faltung*

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)\,dz\,.$$

Die *Gammaverteilung* $\gamma(\lambda, r)$ mit Parametern $r, \lambda > 0$ hat die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\, x^{r-1}\, e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{(0\,,\,\infty)}(x)$$

Für $r = 1$ ist dies die Exponentialverteilung mit Parameter λ.

Seien X und Y unabhängig und bezüglich $\gamma(\lambda, r)$, bzw. $\gamma(\lambda, s)$ verteilt. Bestimmen Sie die Verteilung von $X+Y$.

6.) [3 Punkte] Sei $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Exponentialverteilung(λ). Sei $\tau_0 = 0$ und $\tau_n = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$ $(n \ge 1)$. Aus dem vorangehenden Beispiel kennen Sie die Verteilung von τ_n. Nun betrachten Sie den Zufallsprozess $(X_t)_{t\ge 0}$ in stetiger Zeit mit

$$X_t = n \iff \tau_n \le t < \tau_{n+1}\,, \quad n \in \mathbb{N}_o\,.$$

Bestimmen Sie die Verteilung von X_t.

ENGLISH VERSION

In the sequel, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ is a probability space.

1.) Borell-Cantelli Lemma (reminder)
Let $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of events in (= elements of) $\mathcal{A}$.
(a) [2 points] Prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}\big(\limsup A_n\big) = 0\,,$$

where $\limsup A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ belongs to infinitely many } A_n\}$.
(b) [3 points Prove that if the A_n are independent, then

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \iff \mathbb{P}\big(\limsup A_n\big) = 0$$
$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty \iff \mathbb{P}\big(\limsup A_n\big) = 1$$

Hint: for the "missing" part of the proof, pass to coplements and use the inequality $1+x \le e^x$ for real x.

2.) [3 Punkte] Recall the rule of total probablity and the formula of Bayes:
Let I be a finite or countable indes set and $B_i \in \mathcal{A}$ pairwise disjoint mwith $\Omega = \bigcup_{i\in I} B_i$. Then for every $A \in \mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i).$$

Furthermore,

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(A \mid B)\, \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}A}\,.$$

Urn I contains 7 red and 3 white balls. Urn II contains 6 red und 3 white balls. Wir perform the following random experiment: Zufallsexperiment durch: first, a randomly chose ball is transferred from Urn I into Urn II. Then we extract a random ball from Urn II.

(a) What is the probability that the ball extracted from Urn II is red ?

(b) Suppose that the ball extracted from Urn II is white. What is the probability that also the ball transferred from Urn I to Urn II was white ?

3.) [3 points] Consider the example of the drunkard's walkwith state space $\{0, 1, \ldots, N\}$ and transition probabilities

$$p(0,0) = p(N,N) = 1\,, \quad p(k,k+1) = p\,,\ p(k,k-1) = 1-p(=:q) \ \text{ for } \ k \in \{1, \ldots, N-1\}\,.$$

Compute for $k = 0, \ldots, N$ the probability

$$F(k,0) = \mathbb{P}[\text{absorption in } 0 \mid \text{start in } k\,]$$

Hint: set up a linear recursion for $F(k,0)$ and solve it. [If you are not familiar with the mothod for solving linear recursions with constant coefficients, contact your colleagues or W. Woess.]

4.) [2 points] Let X be a non-negative random variable. Prove the fololowing: if X is integer-valued, then the expectation is

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq n]\,,$$

and if X is arbitrary real, then

$$\mathbb{E}(X) < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq n] < \infty.$$

5.) [3 points] Exponential- and gamma distribution (reminder). Recall: if X and Y are *independent* real random variables with densitiy functions (with respect to Lebesgue measure) f_X and f_Y, then the denstiy function of $X+Y$ is given by the *convolution*

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)\,dz\,.$$

The *Gamma distribution* $\gamma(\lambda, r)$ with parameters $r, \lambda > 0$ has the densitiy function

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\,x^{r-1}\,e^{-\lambda x}\,\mathbf{1}_{(0\,,\,\infty)}(x)$$

for $r = 1$, this is the exponential distribution with parameter λ.
Let X and Y be independent and distributed according to $\gamma(\lambda, r)$, resp. $\gamma(\lambda, s)$. Determine the distribution of $X+Y$.

6.) [3 points] Let $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of i.i.d. random variables with exponential distribution(λ). Let $\tau_0 = 0$ and $\tau_n = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$ $(n \geq 1)$. From the preceding exercise, you know the distribution of τ_n. Now consider the random process $(X_t)_{t\geq 0}$ in continuous time given by

$$X_t = n \iff \tau_n \leq t < \tau_{n+1}\,, \quad n \in \mathbb{N}_o\,.$$

Determine the distribution of X_t.