Übungen zu **Stochastische Prozesse**

Exercises in **Stochastic Processes**

Prof. Wolfgang Woess, WS 2015/16

7.) [3 Punkte / 3 points] Wir betrachten die folgende Markovkette ("Irrfahrt") mit Zustandsraum $\mathbb{Z}$:

$$p(k, k+1) = p\,, \quad p(k, k-1) = 1 - p\,, \quad p(k, l) = 0 \ \text{ wenn } \ |k - l| \neq 1\,.$$

Entscheiden Sie in Abhängigkeit vom Parameter $p \in (0\,,\,1)$ ob die Irrfahrt rekurrent oder transient ist. [Optionale Zusatzfrage im rekurrenten Fall: handelt es sich um positiv-Rekurrenz oder null-Rekurrenz ?]

Hinweise: um in n Schritten zum Zustand 0 zurückzukehren, muss n gerade sein und genau die Hälfte der Schritte nach rechts gehen. Wieviele $n/2$-elementige Teilmengen hat eine n-elementige Menge (n wieder gerade) ? Kennen Sie die Formel von Stirling ?

English translation: we consider the following Markov chain ("random walk") with state space $\mathbb{Z}$:

$$p(k, k+1) = p\,, \quad p(k, k-1) = 1 - p\,, \quad p(k, l) = 0 \ \text{ if } \ |k - l| \neq 1\,.$$

Decide in dependence on the parameter $p \in (0\,,\,1)$ whether the random walk is recurrent or transient. [Optional additional question in the recurrent case: is this positive or null recurrence ?]

Suggestions: in order to return to state 0 in n steps, n must be even and exactly half of the steps must go right. How many subsets with $n/2$ elements are there in a set with n elements (n again even) ? Do you know Stirling's formula ?

8.) The following exercise is taken almost word by word from the book by Resnick; text only in English.

Zeke Prevents Bankruptcy. Harry's restaurant business fluctuates in successive years between three states: 0 (bankruptcy), 1 (verge of bankruptcy), 2 (solvency). The associated transition matrix is

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

(a) [3 Punkte / 3 points] What is the expected number of years until Happy Harry's restaurant goes bankrupt assuming that he starts from the state of solvency ?

(b) [3 Punkte / 3 points] Harry's rich uncle Zeke decides it is bad for the famliy name if his nephew is allowed to go bankrupt. Thus, when state 0 is entered, Zeke infuses Harry's business with cash returning him to solvency with probability 1.

Write down the transition matrix Q of this modified Markov chain. Is it irreducible ? What is the expected number of years between two cash infusions by Zeke ?

9.) (a) [3 Punkte / 3 points] Seien $(\mathcal{X}, P)$ der Zustandsraum und die Übergangsmatrix einer (zeithomogenen) Markovkette. Zeigen Sie das Folgende: für alle $x, w, y \in \mathcal{X}$ und $z \in [0\,,\,1]$ gilt

$$F(x, y|z) \geq F(x, w|z)F(w, y|z)\,.$$

Hinweis: $[\mathbf{s}^y = n] \supset [\mathbf{s}^y = n\,,\ \mathbf{s}^w \leq n]$.

English translation: Let $(\mathcal{X}, P)$ be the state space and transition matrix of a (time-homogeneous) Markov chain. Show the following: for all $x, w, y \in \mathcal{X}$ and $z \in [0\,,\,1]$,

$$F(x, y|z) \geq F(x, w|z)F(w, y|z)\,.$$

Suggestion: $[\mathbf{s}^y = n] \supset [\mathbf{s}^y = n\,,\ \mathbf{s}^w \leq n]$.

(b) [2 Punkte / 2 points] Seien $x, y \in \mathcal{X}$. Ein *trennender Punkt* zwischen x und y (in dieser Reihenfolge!) ist $w \in \mathcal{X}$, sodass jeder Pfad von x nach y im Graphen der Markovkette durch w gehen muss.

Zeigen Sie dass in diesem Fall $F(x, y|z) = F(x, w|z)F(w, y|z)$.

English translation: Let $x, y \in \mathcal{X}$. A *cut point* between x and y (in this order!) is $w \in \mathcal{X}$ such that any path from x to y in the graph of the Markov chain must pass through w.

Show that in this case $F(x, y|z) = F(x, w|z)F(w, y|z)$.

10.) [3 Punkte / 3 points] Betrachten Sie die "birth-and-death" Markovkette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(0, 0) = 1\,, \quad p(k, k + 1) = p\,,\ p(k, k - 1) = 1 - p \ \text{ für } \ k \geq 1\,.$$

Bestimmen Sie in Abhängikeit von $p \in (0\,,\,1)$ die Wahrscheinlichkeit

$$F(1, 0) = \mathbb{P}[\text{Absorption in } 0 \mid \text{Start in } 1\,]$$

und die mittlere (= erwartete) Dauer bis zur Absorption unter der Bedingung, das letztere eintritt.

Hinweise: zur Berechnung von $F(1, 0)$ kann man Beispiel 3 verwenden und muss dann argumentieren, warum man den Grenzübergang $N \to \infty$ verwenden darf. Alternativ kann man auch das Nachfolgende anwenden.

Zur Berechnung der mittleren Dauer kann man $F(1, 0|z)$ (und die Ableitung) berechnen; dabei kann man Bsp 9(b) auf $F(2, 0|z)$ anwenden. Welche einfache Beziehung gilt zwischen $F(2, 1|z)$ und $F(1, 0|z)$? Beachten Sie, dass $F(1, 0|0) = 0$.

English translation: Consider the "birth-and-death" Markov chain with state space $\mathbb{N}_0$ and transition probabilities

$$p(0, 0) = 1\,, \quad p(k, k + 1) = p\,,\ p(k, k - 1) = 1 - p \ \text{ for } \ k \geq 1\,.$$

Determine in dependence on the parameter $p \in (0\,,\,1)$ the probability

$$F(1, 0) = \mathbb{P}[\text{absorption in } 0 \mid \text{start in } 1\,]$$

and the average (= expected) time until absorption under the condition that absorption takes place.

Suggestions: for the computation of $F(1,0)$ one can use Exercise 3 and has to argue why it is legitimate to pass to the limit as $N \to \infty$. Alternatively one can use the following.
For computing the average duration, one can compute $F(1,0|z)$ (and its derivative); for doing so, one can apply Ex. 9(b) to $F(2,0|z)$. Which simple relation is valid between $F(2,1|z)$ and $F(1,0|z)$? Observe that $F(1,0|0) = 0$.

(b) [2 Punkte / 2 points] Modifizieren Sie die obigen Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt: $p(0,0) = 0$ und $p(0,1) = 1$. Entscheiden Sie für welche Werte von p die resultierende Markovkette transient / null-rekurrent / positiv-rekurrent ist.

Modify the above transition probabilities as follows: $p(0,0) = 0$ and $p(0,1) = 1$. Decide for which values of p the resulting Markov chain is transient / null-recurrent / positive-recurrent.

11.) (a) [3 Punkte / 3 points] Sei $(\mathcal{X}, P)$ irreduzibel. Zeigen Sie dass für $x \in \mathcal{X}$

$$\mathbb{P}_x[Z_n = x \text{ unendlich oft}] = \begin{cases} 1 & \text{im rekurrenten Fall,} \\ 0 & \text{im transienten Fall.} \end{cases}$$

Hinweis: erstellen Sie eine Rekursion für $\mathbb{P}_x[Z_n = x \text{ mindestens } N+1 \text{ mal}]$.

English translation: Let $(\mathcal{X}, P)$ be irreducible. Show that for $x \in \mathcal{X}$

$$\mathbb{P}_x[Z_n = x \text{ infinitely often}] = \begin{cases} 1 & \text{in the recurrent case,} \\ 0 & \text{in the transientcase.} \end{cases}$$

Suggestion: set up a recursion for $\mathbb{P}_x[Z_n = x \text{ at least } N+1 \text{ times}]$.

(b) [3 Punkte / 3 points] Zeigen Sie, dass im transienten Fall

$$\mathbb{P}_x[Z_n = y \text{ unendlich oft}] = 0$$

für beliebige x, y. Leiten Sie daraus her, dass dann

$$\mathbb{P}_x[Z_n \in A \text{ unendlich oft}] = 0$$

für jede *endliche* Menge $A \subset \mathcal{X}$.

English translation: Show that in the transient case

$$\mathbb{P}_x[Z_n = y \text{ infinitely often}] = 0$$

for arbitrary x, y. Deduce that then

$$\mathbb{P}_x[Z_n \in A \text{ infinitely often}] = 0$$

for any *finite* set $A \subset \mathcal{X}$.