

Übungen zu **Stochastische Prozesse**

Exercises in **Stochastic Processes**

Prof. Wolfgang Woess, WS 2015/16

12.) [3 Punkte / 3 points] Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine irreduzible Markovkette mit stationärer Anfangsverteilung ν auf dem Zustandsraum $\mathcal{X}$.

English translation: Let $(X_n)_{n \geq 0}$ be an irreducible Markov chain with stationary initial distribution ν on the state space $\mathcal{X}$.

Berechnen Sie / compute $\mathbb{E}_\nu(\inf\{n \geq 1 : X_n = X_0\})$.

13.) Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $\mathcal{X}$, Übergangsmatrix P und Startverteilung μ .

(a) [2 Punkte] Zeigen Sie, daß auch $((X_n, X_{n+1}))_{n \geq 0}$ eine Markovkette ist und bestimmen Sie ihre Übergangsmatrix Q und ihre Startverteilung.

(b) [3 Punkte] Wir nehmen an, daß $(\mathcal{X}, P)$ irreduzibel ist. Schränken Sie den Zustandsraum der neuen (2-Schritt-)Markovkette auf eine geeignete Teilmenge von $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ ein, sodass diese gleichfalls irreduzibel wird.

Unter der Annahme, dass $(\mathcal{X}, P)$ positiv rekurrent ist, drücken Sie die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung der 2-Schritt-Markovkette auf dem neuen Zustandsraum durch jene von P aus.

English translation: Let $(X_n)_{n \geq 0}$ be a Markov chain with state space $\mathcal{X}$, transition matrix P and initial distribution μ .

(a) [2 points] Show that also $((X_n, X_{n+1}))_{n \geq 0}$ is a Markov chain and determine its transition matrix Q and its initial distribution.

(b) [3 points] We suppose that $(\mathcal{X}, P)$ is irreducible. Restrict the state space of the new (2-step) Markov chain to a suitable subset of $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, such that it also becomes irreducible. Supposing that $(\mathcal{X}, P)$ is positive recurrent, express the stationary probability distribution of the 2-step Markov chain on the new state space in terms of the one of P .

14.) [3 Punkte / 3 points] Sei $(\mathcal{X}, P)$ irreduzibel und positiv rekurrent. Für $x, y \in \mathcal{X}$ betrachten wir die Statistik

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{(x,y)}(X_k, X_{k+1}) \bigg/ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_x(X_k).$$

Konvergiert T_n fast sicher, wenn $n \rightarrow \infty$? Was ist der Grenzwert?

English translation: Let $(\mathcal{X}, P)$ be irreducible and positive recurrent. For $x, y \in \mathcal{X}$, consider the statistic T_n defined above.

Does T_n converge almost surely, as $n \rightarrow \infty$? What is the limit?

15.) Seien $(\mathcal{X}, P)$ der Zustandsraum und die Übergangsmatrix einer Markovkette $(X_n)_{n \geq 0}$, und $\mathcal{X} = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{X}_i$ eine Partition von $\mathcal{X}$, mit der natürlichen Projektion $\pi : \mathcal{X} \rightarrow I$.

(a) [2 Punkte] Zeigen Sie: wenn

$$\bar{p}(i, j) = \sum_{y \in \mathcal{X}_j} p(x, y)$$

von der Wahl von $x \in \mathcal{X}_i$ unabhängig ist, so ist $\bar{X}_n = \pi(X_n)$ eine Markovkette mit Übergangsmatrix $\bar{P}$.

(b) [2 Punkte] Wenn P eine stationäre Verteilung ν hat, verwenden Sie diese, um eine stationäre Verteilung von $\bar{P}$ zu finden.

English translation: Let $(\mathcal{X}, P)$ be the state space and transition matrix of a Markov chain $(X_n)_{n \geq 0}$, and let $\mathcal{X} = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{X}_i$ be a partition of $\mathcal{X}$, with the natural projection $\pi : \mathcal{X} \rightarrow I$.

(a) [2 points] Show: if

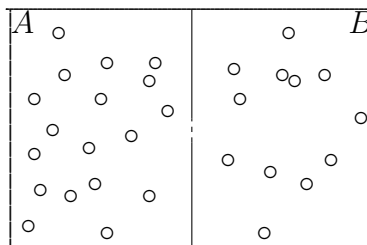
$$\bar{p}(i, j) = \sum_{y \in \mathcal{X}_j} p(x, y)$$

does not depend on the choice of $x \in \mathcal{X}_i$ then $\bar{X}_n = \pi(X_n)$ is a Markov chain with transition matrix $\bar{P}$.

(b) [2 points] If P has a stationary distribution ν , then use the latter to find a stationary distribution of $\bar{P}$.

16.) (a) [1 Punkt] Der Hypercubus der Dimension N ist der Graph mit Knotenmenge $\{0, 1\}^N$ und (ungerichteten) Kanten zwischen jenen Knoten, die sich in genau einer Koordinate unterscheiden. Die einfache Irrfahrt auf dem Hyperkubus ist die Markovkette mit Übergangswahrscheinlichkeiten $1/N$ zwischen benachbarten Knoten. Bestimmen Sie die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Irrfahrt.

(b) [3 Punkte] Das Ehrenfest-Modell (1911)] Ein Behälter enthält N Moleküle. Weiters ist er durch einen “Wand” mit einer kleinen Membran in zwei Hälften (Seiten) A und B geteilt (siehe Skizze). Zu jedem der aufeinanderfolgenden Zeitpunkte passiert ein zufällig (gleich wahrscheinlich) unter allen N ausgewähltes Molekül die Membran in die andere Hälfte des Behälters.



Unsere Markovkette X_n beschreibt die zufällige Anzahl der Moleküle im Teil A zum Zeitpunkt n . Beschreiben Sie den Zustandsraum und die Übergangswahrscheinlichkeiten. Kombinieren Sie (a) mit Beispiel 15, um die stationäre Verteilung zu finden.

[Hinweis: stellen Sie sich vor, dass die Moleküle die Nummern $1, 2, \dots, N$ tragen, und verfolgen Sie die Moleküle in Teil $A \equiv \text{label } 0$.]

English translation: **(a) [1 point]** The hypercube with dimension N is the graph with vertex set $\{0, 1\}^N$ and (undirected) edges between those vertices which differ in precisely one coordinate. Simple random walk on the hypercube is the Markov chain with transition probabilities $1/N$ between neighbouring vertices. Determine the stationary probability distribution of this random walk.

(b) [3 points] The Ehrenfest model (1911) A box contains N molecules. Furthermore, the box is separated in two halves (sides) A and B by a “wall” with a small membrane, (see figure). In each of the successive time instants, a single molecule chosen randomly among all N molecules crosses the membrane to the other half of the box.

Our Markov chain X_n describes the random number of molecules in part A at time n . Describe its state space and the transition probabilities. Combine (a) with Exercise 15 to find the stationary distribution.

[Hint: imagine that the molecules are numbered $1, 2, \dots, N$ and keep track of the molecules in part $A \equiv$ label 0.]