Übungen zu **Stochastische Prozesse**
Exercises in **Stochastic Processes**
Prof. Wolfgang Woess, WS 2015/16

17.) [2 Punkte / 2 points] Wir betrachten den Galton-Watson-Prozess mit der folgenden Nachkommens-Verteilung: jedes Mitglieds der Population führt sukzessive unabhängige Münzwürfe durch, wobei die Wahrscheinlichkeit von "Kopf" $\theta \in (0\,,\,1)$ (und die Wahrscheinlichkeit von "Zahl" $1-\theta$) ist. Bei jedem Münzwurf von "Kopf" wird ein weiterer Nachkomme produziert, so lange bis zum ersten Mal "Zahl" kommt. D.h., wenn k mal hintereinander "Kopf" und dann "Zahl" geworfen wird, ist die Zahl der Nachkommen k.
Schreiben Sie die Nachkommensverteilung an, bestimmen Sie ihre Wahrscheinlickeits-erzeugende Funktion und die Wahrscheinlichkeit, dass die Population ausstirbt.

English translation: Consider the Galton-Watson process with the following offspring distribution of any member of the population: successive i.i.d. coin tosses are performed, where the probability of "head" is $\theta \in (0\,,\,1)$ (and the probability of "tail" is $1-\theta$). Each time "head" is obtained, another offspring is produced, until the first "tail" occurs. That is, if there are k "heads" followed by a "tail" then the offspring number is k.
Write down the offspring distribution, compute its probability generating function $f(z)$ and the extinction probability.

18.) Betrachten Sie einen Galton-Watson-Prozess mit allgemeiner nicht-trivialer Nachkommens-Verteilung μ, mit Anfangszustand 1 (= "Urahn").

(a) [2 Punkte] Unter der Annahme, dass $\overline{\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(k) < \infty$, berechnen Sie die erwartete Größe (Kardinalität) der n-ten Generation.

(b) [3 Punkte] Sei $\mathbf{s} = \mathbf{s}^0$ die Zeit, zu der die Population ausstribt. Wenn $\overline{\mu} \neq 1$, zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}(\mathbf{s} \mid \mathbf{s} < \infty) < \infty\,.$$

Hinweis: Sei $f(z)$ die Wahrscheinlichkeits-erzeugende Funktion von μ und $p = \mathbb{P}[\mathbf{s} < \infty]$ die Aussterbe-Wahrscheinlichkeit. Stellen Sie eine Beziehung zwischen $\mathbb{P}[\mathbf{s} > n \mid \mathbf{s} < \infty]$ und $f(z)$ (sowie den Iterierten dieser Funktion) her, und wenden Sie auf $f(z)$ den Mittelwertsatz an $[\,f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)\,]$.

English translation: Consider a Galton-Watson process with general non-trivial offspring distribution μ, with initial state 1 (= the ancestor).

(a) [2 points] Assuming that $\overline{\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(k) < \infty$, compute the expected size (cardinality) of the n-th generation.

(b) [3 points] Let $\mathbf{s} = \mathbf{s}^0$ be the time when extinction occurs. Show that when $\overline{\mu} \neq 1$,

$$\mathbb{E}(\mathbf{s} \mid \mathbf{s} < \infty) < \infty\,.$$

Hint: Let $f(z)$ be the probability generating function of μ and $p = \mathbb{P}[\mathbf{s} < \infty]$ the extinction probability. Relate $\mathbb{P}[\mathbf{s} > n \mid \mathbf{s} < \infty]$ with $f(z)$ (and its iterates), and apply the the mean value theorem (Mittelwertsatz) $[\,f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)\,]$ to $f(z)$.

19.) [3 Punkte / 3 points] Betrachten Sie einen Galton-Watson-Prozess mit allgemeiner nicht-trivialer Nachkommens-Verteilung μ, mit Anfangszustand 1. Nehmen Sie an, dass die Population fast sicher ausstirbt. Seien

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k \quad \text{und} \quad S = \sum_{k=0}^{\infty} X_k$$

die Anzahl der Population bis zum Zeitpunt n, bzw. die Gesamtzahl der Population bis zu deren Aussterben. Seien

$$h_n(z) = \mathbb{E}(z^{S_n}) \quad \text{und} \quad h(z) = \mathbb{E}(z^S)$$

die zugeordneten Warscheinlichkeits-erzeugenden Funktionen. Finden Sie eine Rekursion für $h_n(z)$ und eine implizite Gleichung für $h(z)$, ausgedrückt durch die Warscheinlichkeits-erzeugende Funktion $f(z)$ von μ.

Hinweise: bedingen Sie auf die möglichen Weerte von X_1 und erinneren Sie sich daran, dass jedes Mitglied der Population als der "Urahn" eines genealogischen Baums mit denselben Charaktersitika gesehen werden kann.

English translation: Consider the Galton-Watson process with general non-trivial offspring distribution μ, with initial state 1. Suppose that extinction occurs almost surely. Let

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k \quad \text{and} \quad S = \sum_{k=0}^{\infty} X_k$$

be the total size of the population until time n, and the overall total size of the population (respectively). Let

$$h_n(z) = \mathbb{E}(z^{S_n}) \quad \text{and} \quad h(z) = \mathbb{E}(z^S)$$

be the associated probability generating functions. Find a recursion for $h_n(z)$ and an implicit equation for $h(z)$ in terms of the probability generating function $f(z)$ of μ.

Hint: condition upon the possible values of X_1 and recall that each member of the population can be seen as the ancestor of a genealogical tree with the same characteristics.

20.) [3 Punkte / 3 points] Berechnen Sie die Funktion $h(z)$ für das Beispiel aus Aufgabe 17, und verwenden Sie den binomischen Lehrsatz, um $h(z)$ in eine Potenzreihe zu entwickeln, um so explizite Formeln für $\mathbb{P}[S = n]$, $n \in \mathbb{N}_0$ zu erhalten.

English translation: Compute the function $h(z)$ for the example of Exercise 17, and use the binomial theorem to expand it in a power series in order to get explicit formulas for $\mathbb{P}[S = n]$, $n \in \mathbb{N}_0$.

21.) [3 Punkte / 3 points] Sei $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Erneuerungsprozess ohne anfängliche Verzögerung ("pure"), dessen Wartezeiten gemäß der Dichtefunktion

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

verteilt sind. Berechnen sie die Verteilung von N_t.

English translation: Let $(N_t)_{t\geq 0}$ be a pure renewal process, where the interarrival times Y_n are distributed with density

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\,.$$

Compute the distribution of N_t.