Übungen zu **Stochastische Prozesse**

Exercises in **Stochastic Processes**

Prof. Wolfgang Woess, WS 2015/16

22.) Erneuerungssatz von Blackwell, diskreter Fall.

Seien $(Y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge nichtnegativer, ganzzahliger, unabhängiger & identisch verteilter Zufallsvariablen (Wartezeiten), $S_k = Y_1 + \cdots + Y_k$, und

$$N_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,n]}(S_k)$$

der zugeordnete Erneuerungsprozess (in diskreter Zeit, da die Erneuerungs-Ereignisse nur zu ganzzahligen Momenten stattfinden können). Sei

$$f_k = \mathbb{P}[Y_n = k]\,, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad u_n = \mathbb{E}(N_n).$$

Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an dass $\mathsf{ggT}\{k : f_k > 0\} = 1$.

(a) [2 Punkte] Stellen Sie eine Beziehung zwischen u_n und den Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[S_n = k]$ her, und berechnen Sie u_0 mittels (einer) der Zahlen f_k.

(b) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f_k\, u_{n-k}\,.$$

(c) [1 Punkt] Verwenden Sie (a), um zu verifizieren, dass sich die Zahlen $f_k^* = u_0\, f_k$ $(k \geq 1)$ zu 1 summieren, definieren Sie $u_n^* = u_n/u_0$, und führen Sie die Formel aus (b) in eine für u_n^* und f_k^* über.

(d) [3 Punkte] Verwenden Sie die Markovkette auf $\mathbb{N}_0$, die in einer der letzten Vorlesungen vorgeschlagen wurde (welche die f_k^* in ihren Übergangswahrscheinlichkeiten verwendet), um $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^*$ mittels der Zahlen f_k^* auszudrücken. Leiten Sie daraus her, dass

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1/\mathbb{E}(Y_1)\,.$$

English translation: Blackwell's Renewal Theorem, discrete case.

Let $(Y_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of non-negative, i.i.d. integer valued random variables (interarrival times), $S_k = Y_1 + \cdots + Y_k$, and

$$N_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,n]}(S_k)$$

be the associated renewal process (in discrete time, since renewals can only occur at integer moments.) Let

$$f_k = \mathbb{P}[Y_n = k]\,, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{and} \quad u_n = \mathbb{E}(N_n).$$

We assume without loss of generality that $\mathsf{gcd}\{k : f_k > 0\} = 1$.

(a) [2 points] Relate u_n with the probabilities $\mathbb{P}[S_n = k]$ and compute u_0 in terms of (one of) the numbers f_k .

(b) [3 points] Show that for $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \, u_{n-k} \,.$$

(c) [1 point] Use (a) to verify that the numbers $f_k^* = u_0 \, f_k$ $(k \geq 1)$ sum up to 1, define $u_n^* = u_n/u_0$, and transform the formula of (b) into one for u_n^* and f_k^* .

(d) [3 points] Use the Markov chain on $\mathbb{N}_0$ proposed in one of the last lectures (involving the f_k^* in its transition probabilities) to express $\lim_n u_n^*$ in terms of the numbers f_k^*. Deduce from this that

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1/\mathbb{E}(Y_1)\,.$$