Übungen zu **Stochastische Prozesse**

Exercises in **Stochastic Processes**

Prof. Wolfgang Woess, WS 2015/16

23.) [3 Punkte / 3 points] (Random walk on $\mathbb{R}$). Seien (Y_n) eine Folge unabhängiger, identisch verteilter reeller ZV und $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Zeigen Sie, dass für $h > 0$ und $M \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[|S_n| < h \text{ mindestens } M \text{ mal}] \geq \mathbb{P}[\exists\, n \geq 1 : |S_n| < h/M]^M$$

English translation: (Random walk on $\mathbb{R}$). Let (Y_n) be a sequence of i.i.d. real random variables and $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Show that for $h > 0$ and $M \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[|S_n| < h \text{ at least } M \text{ times}] \geq \mathbb{P}[\exists\, n \geq 1 : |S_n| < h/M]^M.$$

24.) [3 Punkte / 3 points] (Übung zu Geburts- und Sterbeprozessen) Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariable, exponentialverteilt mit Parametern λ, bzw. μ. Bestimmen sie die Verteilung von $Z = \min\{X, Y\}$ und berechnen Sie $\mathbb{P}[X \leq Y]$.

English translation: (Exercise related to birth- and death processes) Let X and Y be two independent random variables with exponential distribution with parameters λ, resp. μ. Determine the distribution of $Z = \min\{X, Y\}$ and compute $\mathbb{P}[X \leq Y]$.

25.) (Übung zur Normalverteilung, für Brownsche Bewegung).
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige identisch $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen, $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$ und $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix. Dann heißen die neuen Zufallsvariablen $Y_1, ..., Y_m$, definiert durch

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

ein Gaußscher Zufallsvektor (multivariat normalverteilt).

(a) [2 Punkte] Berechnen Sie die Erwartungswerte und die Kovarianzmatrix der Y_i $(i = 1, ..., m)$.

(b) [3 Punkte] Unter der Annahme, dass $m = n$ und A regulär ist, bestimmen Sie die gemeinsame Dichte $g(y_1, \ldots, y_n)$ von $(Y_1, \ldots, Y_n)$. D.h., für Borelmengen $B \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mathbb{P}[(Y_1, \ldots, Y_n) \in B] = \int_B g(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n\,.$$

Hinweise zu (b): Sei $f_0(x)$ die Dichtefunktion von $N(0,1)$. ./.

Dann ist die gemeinsame Dichte von $(X_1, \dots, X_n)$ gegeben durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(x_1) \cdots f_0(x_n)\,.$$

Verifizieren Sie zunächst, dass

$$\mathbb{P}[(Y_1, \dots, Y_n) \in B] = \mathbb{P}[(X_1, \dots, X_n)^T \in A^{-1}(B - \vec{\mu})], \qquad \vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T.$$

Letzteres können Sie als Integral über die Menge $A^{-1}(B - \vec{\mu})$ ausdrücken. Durch die auf der Hand liegende mehrdimensionale lineare Substitution können Sie dies als Integral über B ausrücken. Der Integrand ist die gesuchte Dichte.

English translation: (Exercise regarding normal distribution, for Brownian motion).
Let $X_1, \dots, X_n$ be i.i.d. $N(0,1)$-distributed random variables, $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$ and $A = (a_{ij})$ an $m \times n$-matrix. Then the new random variables $Y_1, ..., Y_m$, defined as

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

are called a Gaussian random vector (multivariate normally distributed).

(a) [2 points] Compute the expected values and the covariance matrix of Y_i $(i = 1, ..., m)$.

(b) [3 points] Under the assumption that $m = n$ and that A is regular, determine the joint density $g(y_1, \dots, y_n)$ of $(Y_1, \dots, Y_n)$. That is, for Borelm sets $B subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{P}[(Y_1, \dots, Y_n) \in B] = \int_B g(y_1, \dots, y_n)\, dy_1 \dots dy_n\,.$$

Hints for (b): Let $f_0(x)$ be the density function of $N(0,1)$. Then the joint density of $(X_1, \dots, X_n)$ is given as

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(x_1) \cdots f_0(x_n)\,.$$

Verify first that

$$\mathbb{P}[(Y_1, \dots, Y_n) \in B] = \mathbb{P}[(X_1, \dots, X_n)^T \in A^{-1}(B - \vec{\mu})], \qquad \vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T.$$

The right hand side can be expressed as an integral over the set $A^{-1}(B - \vec{\mu})$. . By the obvious multidimensional linear substitution, this can be expressed as an integral over B. The integrand is the required densitiy.