Übungen zu **Stochastische Prozesse**

Prof. Wolfgang Woess, WS 2020/21

Im Folgenden ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

1.) [3 Punkte] Borel-Cantelli Lemma (Auffrischung)
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen in (=Elementen von) $\mathcal{A}$. Wir erinnern uns:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}\big(\limsup A_n\big) = 0\,,$$

wobei $\limsup A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ist in undenlichen vielen } A_n \text{ enthalten}\}$.
Zeigen Sie: wenn die A_n unabhängig sind, so gilt

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \iff \mathbb{P}\big(\limsup A_n\big) = 0$$
$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty \iff \mathbb{P}\big(\limsup A_n\big) = 1$$

Hinweis: für die "fehlende" Beweis-Richtung gehen Sie zu den Komplementen über, und verwenden Sie die Ungleichung $1 + x \le e^x$ für relles x.

2.) [3 Punkte] Betrachten Sie das Beispiel der Irrfahrt des Betrunkenen mit Zustandsraum $\{0, 1, \ldots, N\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(0,0) = p(N,N) = 1\,, \quad p(k,k+1) = p\,,\ p(k,k-1) = 1 - p (=: q) \ \text{ für } \ k \in \{1, \ldots, N-1\}\,.$$

Bestimmen Sie für $k = 0, \ldots, N$ die Wahrscheinlichkeit

$$F(k,0) = \mathbb{P}[\text{Absorption in } 0 \mid \text{Start in } k\,]$$

Hinweis: erstellen Sie eine lineare Rekursion für $F(k,0)$ und lösen Sie diese.

3.) [3 Punkte] Gammaverteilung (Auffrischung aus VO+UE Wahrscheinlichkeitstheorie).
Die *Gammaverteilung* $\gamma(\lambda, r)$ mit Parametern $r, \lambda > 0$ hat die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\, x^{r-1}\, e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{(0\,,\,\infty)}(x)$$

Für $r = 1$ ist dies die Exponentialverteilung mit Parameter λ.
Seien X und Y unabhängig und bezüglich $\gamma(\lambda, r)$, bzw. $\gamma(\lambda, s)$ verteilt. Erinnern Sie sich an die Antwort: was ist dann die Verteilung von $X + Y$?

Nun sei $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Exponentialverteilung(λ). Sei $\tau_0 = 0$ und $\tau_n = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$ $(n \ge 1)$. Aus dem Obigen kennen Sie die Verteilung von τ_n. Betrachten Sie den Zufallsprozess $(X_t)_{t\ge 0}$ in stetiger Zeit mit

$$X_t = n \iff \tau_n \le t < \tau_{n+1}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Bestimmen Sie die Verteilung von X_t. (Nicht ausintegrieren, nur partiell integrieren!)

4.) [2 Punkte] Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und Verteilung μ. Die Wahrscheinlichkeits-erzeugende Funktion (probability generating function) von X, bzw. μ, ist

$$f_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = n]\, z^n\,, \quad \text{bzw.} \quad f_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n)\, z^n\,, \quad z \in [0\,,\,1]\,.$$

Nun seien X und Y zwei unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige ZV. Drücken Sie $f_{X+Y}(z)$ durch $f_X(z)$ und $f_Y(z)$ aus.
Hinweis: $f_X(z)$ ist ein Erwartungswert.

5.) Sei μ_0 eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N}_0$ und $(X_n)_{n\geq 0}$ der Galton-Watson-Prozess mit Nachkommenverteilung (offspring distribution) μ.
Er kann wie folgt konstruiert werden: man startet mit einer Doppelfolge $(Y_{n,k})_{n\geq 0, k\geq 1}$ unabhängiger, identisch verteilter (iid) ZV mit Verteilung μ. Dabei ist $Y_{n,k}$ die Anzahl der Kinder des k-en Mitglieds der n-ten Generation, soferne diese mindestens k Mitglieder hat, und

$$X_0 = 1\,, \quad X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Y_{n,k}\,.$$

(a) [2 Punkte] Verwenden Sie Bsp 4 um die erzeugende Funktion

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}[X_n = \ell \mid X_{n-1} = k]\, z^\ell$$

durch $f_\mu(z)$ auszudrčken.
(b) [3 Punkte] Sei $g_n(z) = f_{X_n}(z)$. Verwenden Sie (a) und die Regel von der totalen Wahrscheinlichkeit um g_n durch g_{n-1} auszudrücken.
(c) [2 Punkte] Verwenden Sie (b) iterativ um g_n durch f_μ auszudrücken.
Fortsetzung folgt.