Übungen zu **Stochastische Prozesse**

Prof. Wolfgang Woess, WS 2020/21

6.) Galton-Watson-Prozess, Forsetzung. Wir nehmen an, dass $\mu(0) + \mu(1) < 1$.

(a) [1.5 Punkte] Aus Beispiel 5c) folgt, dass $g_n = f_\mu \circ g_{n-1}$.

Folgern Sie daraus, das $\mathbb{P}[X_n = 0] = f_\mu(\mathbb{P}[X_{n-1} = 0])$.

Sei $\lambda = \mathbb{P}[\textit{die Population stirbt aus}]$. Drücken Sie λ mittels der Folge $(\mathbb{P}[X_n = 0])_{n\in\mathbb{N}}$ aus, und zeigen Sie dass λ der kleinste Fixpunkt von $f_\mu(z)$ ist.

(b) [1.5 Punkte] Berechnen Sie die linksseitige Ableitung $f'_\mu(1-)$ und diskutieren Sie die Gestalt von $f_\mu(z)$ im Intervall $[0\,,\,1]$:

Unter welcher Bedingung hat die Funktion mehr als einen Fixpunkt ?

Geben Sie eine generelle Bedingung für $\mathbb{P}[\textit{die Population überlebt für immer}] > 0$ an.

7.) Galton-Watson-Prozess, Forsetzung. [3 Punkte] Wir nehmen wieder an, dass $\mu(0) + \mu(1) < 1$. Sei $\mathbf{t}$ die (zufällige) Zeit bis zum Aussterben der Popolation, d.h.,

$$\mathbf{t} = \inf\{n : X_n = 0\}.$$

Zeigen Sie dass $\mathbb{E}(\mathbf{t}) < \infty$ wenn $\overline{\mu} < 1$.

8.) (a) [2 Punkte] (Markovketten) Sei $(\mathcal{X}, P)$ irreduzibel. Zeigen Sie dass für $x \in \mathcal{X}$

$$\mathbb{P}_x[X_n = x \text{ unendlich oft}] = \begin{cases} 1 & \text{im rekurrenten Fall,} \\ 0 & \text{im transienten Fall.} \end{cases}$$

Hinweis: erstellen Sie eine Rekursion für $\mathbb{P}_x[X_n = x \text{ mindestens } N+1 \text{ mal}]$.

(b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass im transienten Fall

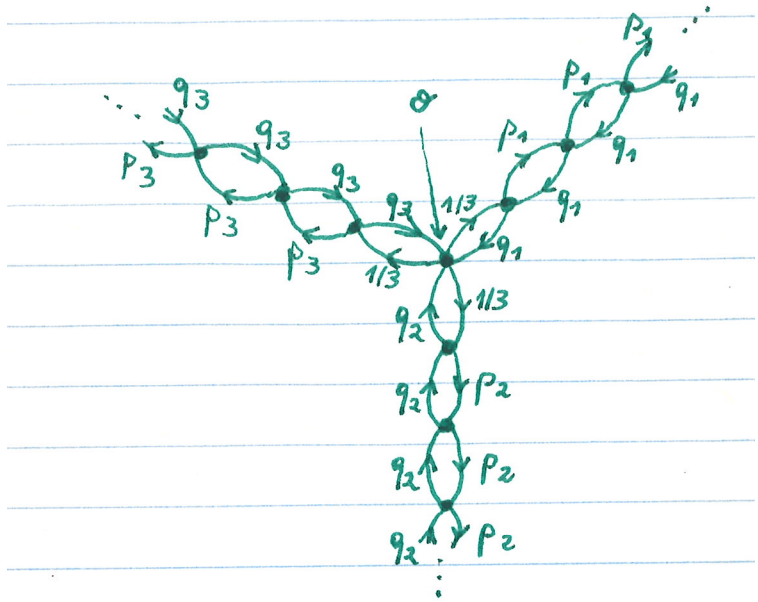
$$\mathbb{P}_x[Z_n = y \text{ unendlich oft}] = 0$$

für beliebige x, y. Leiten Sie daraus her, dass dann

$$\mathbb{P}_x[Z_n \in A \text{ unendlich oft}] = 0$$

für jede *endliche* Menge $A \subset \mathcal{X}$.

9.) [3 Punkte] $p_i + q_i = 1\,, \quad 0 < p_i < 1 \quad (i = 1, 2, 3).$



Berechnen Sie $U(o, o|z)$. Wann ist diese Markovkette rekurrent; wann ist sie positiv rekurrent ?

10.) (a) [2 Punkte] Erinnerung: sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{C_i : i \in I\}$ eine messbare, höchstens abzählbare Partition von Ω. (Messbar bedeutet, dass $C_i \in \mathcal{A}$.) Sei $\mathcal{F}$ die von $\{C_i : i \in I\}$ erzeugte Teil-σ-algebra von $\mathcal{A}$. (Die C_i sind deren "Atome".) Zeigen sie: eine reellwertige Zufallsvariable Y ist messbar bezüglich $\mathcal{F}$ genau dann wenn sie auf jedem C_i konstant ist.

Nun sei X eine reellwertige, integrierbare Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Erinnerung: die bedingte Erwartung von X ist jene f.s. eindeutige $\mathcal{F}$-messbare ZV, für die

$$\mathbb{E}(X \cdot \mathbf{1}_F) = \mathbb{E}(Y \cdot \mathbf{1}_F) \quad \forall\, F \in \mathcal{F}.$$

Zeigen Sie: der Wert von Y auf C_i ist $\mathbb{E}_{\mathbb{P}(\cdot|C_i)}(X)$, der Erwartungswert bezüglich dem W-Maß $A \mapsto \mathbb{P}(A \mid C_i)$, $A \in \mathcal{A}$.

(b) [2 Punkte] Nun sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $\mathcal{X}$ und Übergangsmatrix P, und sei $\mathcal{A}_n$ die von $X_0, \ldots, X_n$ erzeugte σ-Algebra. Weiters sei $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die

$$\sum_y p(x, y)\, |f(y)| < \infty \quad \text{für alle} \quad x \in \mathcal{X}.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}\big(f(X_{n+1}) \mid \mathcal{A}_n\big)$.

(c) [2 Punkte] Unter welcher Bedingung an die Funktion f ist $\big(f(X_n)\big)_{n\geq 0}$ ein Martingal ?