Übungen zu **Stochastische Prozesse**

Prof. Wolfgang Woess, WS 2020/21

16.) [3 Punkte] Betrachten Sie einen Galton-Watson-Prozess $(X_n)_{n\geq 0}$ mit allgemeiner nicht-trivialer Nachkommens-Verteilung μ, und mit Anfangszustand 1. Nehmen Sie an, dass die Population fast sicher ausstirbt. Seien

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k \quad \text{und} \quad S = \sum_{k=0}^{\infty} X_k$$

die Anzahl der Population bis zum Zeitpunt n, bzw. die Gesamtzahl der Population bis zu deren Aussterben. Seien

$$h_n(z) = \mathbb{E}(z^{S_n}) \quad \text{und} \quad h(z) = \mathbb{E}(z^S)$$

die zugeordneten Warscheinlichkeits-erzeugenden Funktionen. Finden Sie eine Rekursion für $h_n(z)$ und eine implizite Gleichung für $h(z)$, ausgedrückt durch die Warscheinlichkeits-erzeugende Funktion $f(z)$ von μ.

Hinweise: bedingen Sie auf die möglichen Werte von X_1 und erinneren Sie sich daran, dass jedes Mitglied der Population als der "Urahn" eines genealogischen Baums mit denselben Charaktersitika gesehen werden kann.

17.) Wir betrachten den Galton-Watson-Prozess mit der folgenden Nachkommens-Verteilung: jedes Mitglied der Population führt sukzessive unabhängige Münzwürfe durch, wobei die Wahrscheinlichkeit von "Kopf" $\theta \in (0\,,\,1)$ und die Wahrscheinlichkeit von "Zahl" $1-\theta$ ist. Bei jedem Münzwurf von "Kopf" wird ein weiterer Nachkomme produziert, so lange bis zum ersten Mal "Zahl" kommt. D.h., wenn k mal hintereinander "Kopf" und dann "Zahl" geworfen wird, ist die Zahl der Nachkommen k.

(a) [2 Punkte] Schreiben Sie die Nachkommensverteilung an, bestimmen Sie ihre Wahrscheinlickeits-erzeugende Funktion und die Wahrscheinlichkeit, dass die Population ausstirbt.

(b) [3 Punkte] Berechnen Sie für dieses Beispiel die Funktion $h(z)$ aus Aufgabe 19, und verwenden Sie den binomischen Lehrsatz, um $h(z)$ in eine Potenzreihe zu entwickeln, um so explizite Formeln für $\mathbb{P}[S = n]$, $n \in \mathbb{N}_0$ zu erhalten.

18.) [2 Punkte] In einem Erneuerungsprozess $(N_t)_{t\geq 0}$ haben die unabhängigen Wartezeiten (Y_n) die Dichtefunktion

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda(x-d)}\, \mathbf{1}_{(d\,,\,\infty)}(x)\,, \qquad d > 0.$$

Drücken Sie $\mathbb{P}[N_t \geq k]$ durch ein gamma-Integral aus.

Hinweis: Was ist die Verteilung von $Y_n - d$?

19.) [nach Resnick, Seite 283] Die Feuerwehrzentrale der Stadt Groß-Hintertupfing erhält Brandmelde-Anrufe entsprechend einem Poisson-Prozess mit einer Rate von 3 pro Tag (Zeiteinheit = 1 Tag). Bei jeder Brandmeldung muss die Feuerwehr ausrücken (selbst wenn es falscher Alarm ist).

(a) [1 Punkt] Ein Feuerwehrmann erhält nach jedem 300sten Alarm eine Gehaltserhöhung. Was ist die mittlere Wartezeit bis zur nächsten Gehaltserhöhung?

(b) [3 Punkte] Bei den eingehenden Anrufen sind im Mittel ein Drittel falsche Alarme. Beschreiben Sie den Prozess der echten Alarme. D.h., bestimmen Sie die Verteilung der Wartezeiten zwischen zwei aufeinanderfolgenden echten Alarm-Anrufen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem Tag k falsche Alarme gibt.

Hinweis: Ordnen Sie jedem Anruf eine Bernoulli-Zufallsvariable X_k mit Wert 0 (bzw 1) zu, wenn es sich beim k-ten Anruf um einen falschen (bzw. echten) Alarm handelt. Sei Y_k die Wartezeit zwischen dem $k-1$-ten und dem k-ten Anruf. Wir nehmen an, dass die Folgen (Y_n) und (X_n) voneinander unabhängig und jeweils iid sind. Sie müssen die Verteilung der Wartezeit bis zum ersten echten Alarm bestimmen. Das ist die Verteilung von $Y_1 + ... + Y_n$, wenn der erste echte Alarm beim n-ten Mal hereinkommt.

(c) [1 Punkt] Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach Beginn des Zufallsprozesses der erste falsche Alarm vor dem ersten echten Alarm hereinkommt?

(d) [3 Punkte] Aktuell erhalten Feuerwehrleute 150 Euro pro Tag. Ein neuer Entlohnungsvorschlag richtet sich nach der Zahl der tatsächlichen Feuerbekämpfungen: für jede wird ein mittlerer Betrag von 60 Euro bezahlt (der genaue Betrag ist eine ZV, die sich nach der Schwere des Löscheinsatzes richtet). Bestimmen Sie die erwartete Prämierung bis zum Zeitpunkt t.

Hinweis: Sei R_n die Prämie für den n-ten Einsatz. Wir nehmen an, dass die (R_n) iid und von den Wartezeiten zwischen zwei Einsätzen unabhängig sind. Dann ist die Gesamtprämie bis zum n-ten Einsatz $R_1 + \cdots + R_n$. Für die gefragte Rechnung können Sie wie bei der Wald-Identität vorgehen.

(e) [1 Punkt] Wie hoch müsste der mittlere Betrag sein, damit das neue Schema keine Schlechterstellung bewirkt ?

$\boxed{\text{zu Bsp 15}}$

$h_0 = \frac{h}{M}$ Stoppzeiten:

$t_1 = \inf\{n \geq 1 : |S_n| < h_0\} \leq \infty$

$t_{k+1} = \inf\{n > t_k : |X_{t_k+1} + \ldots + X_n| < h_0\} \leq \infty$

definiert auf $[t_k < \infty]$

$\mathbb{P}[t_{k+1} < \infty] = \sum_j \mathbb{P}[t_{k+1} < \infty, t_k = j]$

$= \sum_j \mathbb{P}[\exists n > j : |X_{j+1} + \ldots + X_n| < h_0, t_k = j]$

unabhängig

$= \sum_j \mathbb{P}[\exists n > 0 : |X_1 + \ldots + X_n| < h_0] \mathbb{P}[t_k = j]$

$= \mathbb{P}[t_1 < \infty] \mathbb{P}[t_k < \infty]$

$\Longrightarrow \mathbb{P}[t_k < \infty] = \mathbb{P}[t_1 < \infty]^k$

$k = M$: $[t_M < \infty] \subseteq [|S_n| < h$ wenigstens M mal$]$

$\mathbb{P}[t_M < \infty] = \mathbb{P}[\exists n : |S_k| < \frac{h}{M}]^M$

Ergänzung (Vergleich mit anderen Lösungsvorschlägen):

$$\mathbb{P}[t_M < \infty] = \sum_{n_1 < n_2 < \ldots < n_M} \mathbb{P}[t_1 = n_1, t_2 = n_2, \ldots, t_M = n_M] \quad \otimes$$

$n_0 := 0$

$$\mathbb{P}\Big[|S_k - S_{n_i}| \geq h_0, \; k = n_i + 1, \ldots, n_{i+1} - 1, \; |S_{n_{i+1}} - S_{n_i}| < h_0, \; i = 0, \ldots, M-1\Big]$$

$$= \prod_{i=0}^{M-1} \mathbb{P}\Big[|S_k - S_{n_i}| \geq h_0, \; k = n_i + 1, \ldots, n_{i+1} - 1, \; |S_{n_{i+1}} - S_{n_i}| < h_0\Big]$$

$$= \prod_{i=0}^{M-1} \mathbb{P}\Big[|S_j| \geq h_0, \; j = 1, \ldots, n_{i+1} - n_i - 1; \; |S_{n_{i+1} - n_i}| < h_0\Big]$$

mit Verwendung von "Stoppzeiten" weniger Schreibarbeit.

$\otimes$ hier wichtig: Zerlegung in <u>disjunkte</u> Ereignisse.