Übungen zu **Stochastische Prozesse**

Prof. Wolfgang Woess, WS 2020/21

20.) [2 Punkte] (Übung zu Geburts- und Sterbeprozessen) Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariable, exponentialverteilt mit Parametern λ, bzw. μ. Bestimmen sie die Verteilung von $Z = \min\{X, Y\}$ und berechnen Sie $\mathbb{P}[X \leq Y]$.

21.) [3 Punkte] Sei Q die Übergangsmatrix einer zeithomogenen (nicht unbedingt irreduziblen) Markovkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit höchstens abzählbarem Zusatndsraum $\mathcal{X}$, und sei $\mathcal{X}_{\text{rec}}$ die Menge der rekurrenten Zustände. Wir bilden den zugeordneten Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ in stetiger Zeit mit Sprungraten $\lambda(x)$, $x \in \mathcal{X}$.
Zeigen Sie: wenn (Y_n) von jedem Startpunkt x_0 asugehend mit Wahrscheinlichkeit 1 die Menge $\mathcal{X}_{\text{rec}}$ erreicht, so ist (X_t) regulär.

22.) [3 Punkte] Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ der "birth and death"-Prozess in stetiger Zeit mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ (wie in Vorlesungsvideo Nr 16 beschrieben). Die (positiven) Geburts- und Sterberaten seien $\lambda_k \sim \lambda \cdot k$ und $\mu_k \sim \mu \cdot k$ (asymptotische Äquivalenz für $k \to \infty$). Zeigen Sie, dass der Prozess regulär ist.

23.) (Wiederholung aus Wahrscheinlichkeitstheorie, für Brownsche Bewegung).
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige identisch $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen, $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ und $A = (a_{ij})$ eine reguläre $n \times n$-Matrix. Dann heißen die neuen Zufallsvariablen $Y_1, ..., Y_n$, definiert durch

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

ein Gaußscher Zufallsvektor (multivariat normalverteilt).

(a) [2 Punkte] Berechnen Sie die Erwartungswerte und die Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$ der Y_i $(i = 1, ..., n)$.

(b) [3 Punkte] Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte $g(y_1, \ldots, y_n)$ von $(Y_1, \ldots, Y_n)$. D.h., für Borelmengen $B \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mathbb{P}[(Y_1, \ldots, Y_n) \in B] = \int_B g(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n\,.$$

Folgern Sie daraus, dass $Y_1, \ldots, Y_n$ genau dann unabhängig sind, wenn sie paarweise unkorreliert sind.

(c) [2 Punkte] Seien U und V zwei unabhängige, $N(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilungen von $\frac{1}{2}(U + V)$ und $\frac{1}{2}(U - V)$ und zeigen Sie, dass die beiden unabhängig sind.

24.)(a) [1 Punkt] Bestimmen Sie Mittelwert und Varianz einer gemäß $N(0, \sigma^2)$ verteilten Zufallsvariablen.

(b) [2 Punkte] Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung (so wie in den einleitenden Beispielen der Vorlesung erklärt), und sei $[a\,,\,b] \subset [0\,,\,\infty)$ ein endliches Intervall. Teilen Sie dieses in 2^n gleichlange Teilintervalle und definieren Sie L_n als die Summe der Absolutbeträge der Inkremente von (B_t) entlang dieser Teilintervalle (Inkrement = Differenz der Werte an den Intervallenden).
Bestimmen Sie Mittelwert und Varianz von L_n.

(c) [3 Punkte] Leiten Sie aus (b) her, dass $L_n \to \infty$ fast sicher.
<u>Hinweis.</u> Sie können z.B. die Chebyshevsche Ungleichung verwenden, um zu zeigen, dass $\mathbb{P}[L_n \leq M] \to 0$ für jedes $M > 0$.

(d) [1 Punkte] Folgern Sie aus (c), dass mit Wahrscheinlichkeit 1 die (zufällige) Kurve $\{(t, B_t) : t \in [a\,,\,b]\}$ nicht rektifizierbar ist.