Übungen zu **Wahrscheinlichkeitstheorie**

Anna Muranova, Wolfgang Woess – SS 2020

1.) Bei einem Kartenspiel mit 32 Karten werden jeweils 9 Karten auf drei Spieler verteilt. Es gibt vier Asse.

(a) [1 Punkt] Wie viele Möglichkeiten gibt es die Karten auf die Spieler zu verteilen? Wie viele Möglichkeiten sind es, wenn jeder der Spieler mindestens ein Ass haben soll?

(b) [1 Punkt] Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Spieler mindestens einen Ass erhält.

(c) [1 Punkt] Ein bestimmter Spieler verrät, dass er genau zwei Asse auf der Hand hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein weiterer Spieler zwei Asse hat?

2.) Im Folgenden sind $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, A_n \in \mathcal{A}$.

(a) [1 Punkt] Beweisen Sie $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie, zuerst für $N \in \mathbb{N}$ und dann für $N = \infty$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n).$$

(c) [1 Punkt] Zeigen Sie: wenn $A_n \supset A_{n+1}$ für alle n, so gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

3.) Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Ereignissen in $\mathcal{A}$ ist

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ist in unendlich vielen } A_n \text{ enthalten}\},$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ist in allen bis auf endlich viele } A_n \text{ enthalten}\}.$$

(a) [2 Punkte] Beweisen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(\limsup(A_n)) = 0\,.$$

(b) [2 Punkte] Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup A_n).$$

Hinweis: betrachten Sie $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$.

4.) In einer Schulklasse befinden sich 25 Personen. Der Lehrer wettet, dass mindestens zwei SchülerInnen am gleichen Tag Geburtstag haben (ohne Beachtung des Jahrgangs). Die Schüler wetten dagegen. Man nehme an, dass ein Jahr 365 Tage habe.

(a) [1 Punkt] Wer wird die Wette eher gewinnen? Sei n die Anzahl der Schüler in einer anderen Klasse. Wie groß darf n maximal sein, damit die Gewinnwahrscheinlichkeit der Schüler größer ist als die des Lehrers?

(b) [1 Punkt] Der Lehrer macht die Wette mit 4 verschiedenen Klassen mit je 25 SchülerInnen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 3 Mal gewinnt?

5.) (a) [1 Punkt] Ein Würfel wird N mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man die erste 6 beim n-ten Wurf bekommt.

(b) [1 Punkt] Ein fairer Würfel wird so lange geworfen, bis man die erste 6 bekommt. Seit T (Wartezeit) die Zufallsvbariable mit Werten in $\mathbb{N} \cup +\infty$, sodass $T = n \iff$ man bekommt die erste 6 beim n-ten Wurf, un $T = +\infty \iff$ man würfelt nie eine 6. Berechnen Sie

$$\mathbb{P}[T = n] \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[T = +\infty].$$

(c) [2 Punkte] Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(T)$, den 2. Moment $\mathbb{E}(T^2)$ sowie die Varianz $\mathbb{V}(T)$.
Hinweis: es kann vor Berechnung des 2. Moments hilfreich sein, zuerst $\mathbb{E}\big(T(T-1)\big)$ zu berechnen.

6.) [2 Punkte] Sei Y ein Zufallsvariable, die gemäß der hypergeometrischen Verteilung $H_{N,R,n}$ verteilt ist.
Berechnen Sie $\mathbb{E}(Y^2)$ sowie die Varianz $\mathbb{V}(Y)$.