Übungen zu **Wahrscheinlichkeitstheorie**

Anna Muranova, Wolfgang Woess – SS 2020

7.) Sei X eine fast sicher endliche, reellwertige Zufallsvariable.

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie: wenn $X \geq 0$ und $\mathbb{E}(X) = 0$ dann ist $X = 0$ fast sicher.

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie: wenn $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ dann ist $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty$ für alle $k \leq n$. $(k, n > 0)$

(c) [1 Punkt] Sei F_X die Verteilungsfunktion von X. Drücken Sie den linksseitigen Grenzwert $F_X(t_0-) = \lim\limits_{t \to t_0-} F_X(t)$ als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses betreffend X aus. Was ist $F_X(t_0) - F_X(t_0-)$?

8.) Berechnen Sie Mittelwert und Varianz der folgenden stetigen Verteilungen.

(a) [2 Punkte] Dreiecksverteilung auf dem Intervall $[a\,,\,b]$. Dichte: $f(x) = 0$ außerhalb von $(a\,,\,b)$, und f ist affin-linear (=eine Gerade) in jedem der Intervalle $[a\,,\,\frac{a+b}{2}]$ und $[\frac{a+b}{2}\,,\,b]$, mit $f(\frac{a+b}{2}) = c$. Der richtige Wert von c ist zu bestimmen.

(b) [2 Punkte] Gammaverteilung $\gamma(\lambda, r)$ mit Parametern $r, \lambda > 0$ und Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1}\, e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{(0\,,\,\infty)}(x)\,.$$

Zeigen Sie auch, dass dies in der Tat eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(c) [3 Punkte] Betaverteilung $\beta(\lambda, \mu)$ mit Parametern $\lambda, \mu > -1$ und Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{\Gamma(\lambda + \mu + 2)}{\Gamma(\lambda + 1)\Gamma(\mu + 1)}\, x^{\lambda}(1 - x)^{\mu}\, \mathbf{1}_{(0\,,\,1)}(x)\,.$$

Zeigen Sie auch, dass dies in der Tat eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.
[NB: die Betaverteilung wird oft auch mit $a = \lambda + 1$ und $b = \mu + 1$ parametrisiert.]

9.) [3 Punkte] Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Gammaverteilung für den Fall, dass $r \in \mathbb{N}$.

10.) Bestimmen Sie die Verteilung (= die Dichte) von $Y = X^2$, wenn die Zufallsvariable X

(a) [2 Punkte] standard-normalverteilt, (b) [2 Punkte] exponentialverteilt ist

11.) [2 Punkte] Die Zufallsvariable X sei stetig gleichverteilt auf dem Intervall $(0,1)$. Bestimmen Sie die Verteilung von $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln X$, wo $\lambda > 0$.

12.) (a) [2 Punkte] Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[X > n]\,.$$

(b) [3 Punkte] Sei X eine beliebige nichtnegative ZV. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}(X) = \int_{[0\,,\,\infty)} \mathbb{P}[X > x]\,dx\,.$$

(c) [2 Punkte] Sei X eine beliebige Zufallsvariable. Zeigen Sie: X ist integrierbar (d.h., $\mathbb{E}(|X|) < \infty$) genau dann wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[|X| > n] < \infty\,.$$

(d) [3 Punkte] Leiten Sie aus (c) das Folgende her:
Wenn X integrierbar ist, so ist

$$\lim_{k\to\infty} k\mathbb{P}[|X| > k] = 0.$$

[Hinweis: betrachten Sie $\mathbb{P}[|X| > n]$ für $n \in [k/2\,,\,k]$.]