Übungen zu **Wahrscheinlichkeitstheorie**

Anna Muranova, Wolfgang Woess – SS 2020

13.) Die Füllmenge von Halbliterflaschen werde durch eine normalverteilte Zufallsvariable X mit Erwartungswert 0.5 und Standardabweichung (= Quadratwurzel der Varianz) $0,01$ beschrieben.

(a) [1 Punkt] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge einer zufällig ausgewählten Flasche zwischen $0,49$ und $0,51$ liegt. Bestimmen Sie c, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% die Füllmenge einer zufällig ausgewählten Flasche mindestens c ist.

(b) [1 Punkt] Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Kasten von 20 Flaschen maximal 3 Flaschen weniger als $0,48l$ enthalten? Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn bekannt ist, dass keine Flasche mehr als $0,51l$ beinhaltet?

Hinweise:
(1) Erinnern Sie sich, wie eine $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte ZV in eine standard-normalverteilte ZV übergeführt werden kann.
(2) Die Verteilungsfunktion der standard-Normalverteilung wird üblicherweise mit $\Phi(t)$ bezeichnet. Sie kann nicht durch elementare Integration explizit berechnet werden, die Funktionswerte liegen aber in Tabellen vor, die man sowohl im Internet als auch in diversen Lehrbüchern leicht finden kann.

14.) [3 Punkte] Die zweidimensionale Normalverteilung mit Parametern $\mu_1\,,\ \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1^2\,,\ \sigma_2^2 > 0$ und $-1 < \rho < 1$ hat die Dichtefunktion

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2 0} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right).$$

Berechnen Sie die beiden Randverteilungen, deren Mittelwerte und Varianzen, sowie den Korrelationskoeffizienten.

Hinweis: Statt rechnerisch zu integrieren ist es praktischer, in geeigneter Weise auf vollstänbdige Quadrate zu ergänzen.

15.) [3 Punkte] Beweisen Sie: sind $X_1\,, \dots, X_n$ unabhängige relle Zufallsvariablen, dann sind auch die beiden k, bzw. $(n-k)$-dimensionalen Zuvallsvektoren $(X_1\,, \dots, X_k)$ und $(X_{k+1}\,, \dots, X_n)$ unabhängig.

Hinweis: Durchschnittsstabile Erzeuger.

16.) Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei voneinander unabhängige Folgen von reellen Zufallsvariablen, d.h., für alle n sind die beiden Zufallsvektoren $(X_1, \ldots, X_n)$ und $(Y_1, \ldots, Y_n)$ voneinander unabhängig. Wir nehmen an, dass $X_n \to X$ und $Y_n \to Y$ fast sicher, wobei X, Y fast sicher endliche ZV sind. Insbesondere sind auch $\tilde{X} = \sup_n X_n$ und $\tilde{Y} = \sup_n Y_n$ fast sicher endlich.

(a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ unabhängig sind.

(b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass X und Y unabhängig sind.

Hinweise: (1) Stetigkeit von $\mathbb{P}$.
(2) Es reicht, zu zeigen dass $\mathbb{P}[X \le x\,,\ Y \le y] = \mathbb{P}[X \le x]\,\mathbb{P}[Y \le y]$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. (Ebenso für $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$.)
(3) Weiters: $\lim = \liminf = \limsup$ im konvergenten Fall.

17) Seien X und Y zwei unabhängige $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariablen.

(a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Verteilung von $X+Y$ im Allgemeinen (Summendarstellung genügt) und (explizit) für den Fall, dass X und Y Poisson-verteilt sind mit Parametern λ_X bzw. λ_Y.

(b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Verteilung der Summe von n unabhängig und identisch verteilten Bernoulli-Zufallsvariablen $X_i, i = 1, \ldots, n$ mit Parameter $p = \mathbb{P}(X_i = 1)$.

18.) [1 Punkt] Ein fairer Würfel werde n Mal geworfen. Sei X_i die Augenzahl beim i-ten Wurf und

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

die durchschnittliche Augenzahl nach n Würfen. Bestimmen Sie n mithilfe der Chebyschev-Ungleichung, so dass gilt:

$$\mathbb{P}(3,35 \le \overline{X}_n \le 3,65) \ge 0,95.$$