Übungen zu **Wahrscheinlichkeitstheorie**

Anna Muranova, Wolfgang Woess – SS 2020

---

19) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \big([0\,,\,1), \mathcal{B}_{[0\,,\,1)}, \lambda\big)$ der Lebesgue-Wahrscheinlichkeitsraum. Für $\omega \in [0\,,\,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 0\,, & \text{wenn } \lfloor 2^n \omega \rfloor \text{ gerade ist,} \\ 1\,, & \text{wenn } \lfloor 2^n \omega \rfloor \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

(a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Verteilung von X_n.

(b) [2 Punkte] Was ist die Verteilung der Zufallsvariablen $Y = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$?

(c) [3 Punkte] Zeigen sie, dass die Zufallvariablen X_n , $n \in \mathbb{N}$, unabhängig sind.

(d) [3 Punkte] Erklären Sie, wie Sie auf dem Lebesgueraum eine Folge (Y_n) von unabhängigen ZV konstruieren können, die alle auf dem Einheitsintervall (stetig) gleichverteilt sind.

Hinweise: Schlagwort "Ziffernentwicklung", zur richtigen Basis.
Zu (a+c): betrachten Sie die gemeinsame diskrete Dichte von $(X_1\,, \ldots, X_n)$.

20) (a) [1 Punkt] Wie können Sie angesichts von Bsp. 19 vorgehen, um auf dem Lebesgueraum eine Folge unabhängiger ZV zu konstruieren, die alle auf $\{0, \ldots, 9\}$ gleichverteilt sind ?

(b) [1 Punkt] Wie können Sie angesichts von Bsp. 19 vorgehen, um auf dem Lebesgueraum eine Folge unabhängiger ZV zu konstruieren, die alle exponentialverteilt sind mit Parameter $\lambda > 0$?

Hinweis zu (b): ein früheres Übungsbeispiel kann hilfreich sein.

21) (a) [2 Punkte] Sei X eine reelle ZV mit Werten im Intervall $(a\,,\,b)$ $[-\infty \le a < b \le \infty]$, deren Verteilungsfunktion $F(x) = \mathbb{P}[X \le x]$ *stetig* und auf $(a\,,\,b)$ *strikt monoton wachsend* ist. Bestimmen Sie die Verteilung der zusammengesetzten Zufallsvariablen $Y = F(X)$, also $Y(\omega) = F(X(\omega))$.

(b) [2 Punkte] Seien Y eine auf dem Einheitsintervall stetig gleichverteilte ZV, $(a\,,\,b)$ wie oben, und F eine Verteilungsfunktion mit $F(a+) = 0$, $F(b-) = 1$, die auf dem Intervall strikt wachsend ist. Bestimmen Sie eine Funktion G so, dass die Zufallsvariable $X = G(Y)$ die Funktion F als Verteilungsfunktion hat.

Wie können Sie vorgehen, um auf dem Lebesgueraum eine Folge unabhängiger ZV zu konstruieren, die alle die Funktion F als Verteilungsfunktion haben ?

22) [3 Punkte]   Die Zufallsvariablen X und Y besitzen die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = c \cdot (y + x^3 y^3)\, \mathbf{1}_{(0,1)\times(0,1)}(x,y).$$

(a) Man bestimme c und die Randverteilungen von X und Y.

(b) Sind X und Y unabhängig ? Berechnen Sie $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)$!

23) (a) [2 Punkte]   Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X) = 0, \mathbb{V}(X) = 1$. Sei weiters A eine $n \times n$-Matrix mit $\mathsf{rang}(A) = n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie den Erwartungswertvektor und die Kovarianzmatrix

$$\Sigma^2 = \big(\mathsf{Cov}(X_i, X_j)\big)_{i,j=1}^n \quad \text{von} \quad \mathbf{Y} = A\,\mathbf{X} + \mathbf{b},$$

wobei $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^t$.

(b) [3 Punkte]   Für den Fall, dass $n = 2$ in (a) und X_1, X_2 gemäß $N(0,1)$ verteilt sind, berechnen Sie die gemeinsame Dichte von Y_1 und Y_2, also die Dichte des Zufallsvektors $\mathbf{Y}$ bezüglich dem 2-dimensionalen Lebesguemaß.

24) (a) [1 Punkt]   Für $n \in \mathbb{N}$ sei X_n uniform verteilt auf $\{1, 2, \ldots, n\}$. Konvergiert Folge der ZVn (X_n/n) in Verteilung ? Was ist die Grenzverteilung ?

(b) [2 Punkte]   Welches Grenzwertverhalten muss die Parameterfolge $\theta_n \in (0\,,\,1)$ haben, damit die Binomialverteilungen $B(n, \theta_n)$ schwach gegen die Poissonverteilung mit Parameter $\xi > 0$ konvergieren ?

(c) [2 Punkte]   Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man in 1000 aufeinander folgenden Pokerspielen wenigstens 4 "full houses"hat, exakt und mit Approximation gemäß Teil (b) !

Hinweis: $\mathbb{P}[\text{full house}] \approx 0.00144$