Übungen zu **Wahrscheinlichkeitstheorie**

Anna Muranova, Wolfgang Woess – SS 2020

---

25) [2 Punkte] Berechnen Sie die charakteristischen Funktion der folgenden Zufallsvariablen, bzw. Verteilungen:

- X geometrisch verteilt mit Parameter $\theta \in (0\,,\,1)$,
- X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$,
- X exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

26) (a) [2 Punkte] Berechnen Sie die Momentenfolge der Betaverteilung $\beta(\lambda, \mu)$ (siehe Bsp. 8).

(b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von $\beta(1, 1)$.

Hinweis zu (b): Falls sie die Momentenreihe verwenden: vereinfachen Sie zuerst diese soweit es geht, dann integrieren Sie nach t.

27) (a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion der ZV X genau dann reellwertig ist, wenn $-X$ und X die gleiche Verteilung haben (die Verteilung ist *symmetrisch*).

(b) [1 Punkt] Seien X, Y zwei unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit charakteristischer Funktion $\varphi(t)$. Drücken Sie die charakteristische Funktion von $X - Y$ durch $\varphi(t)$ aus.

(c) [2 Punkte] Ist $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ die charakteristische Funktion einer ZV (bzw. von deren Verteilung) ?

Ist $t \mapsto e^{2(\cos t - 1)}$ die charakteristische Funktion einer ZV (bzw. von deren Verteilung) ?

(d) [2 Punkte] Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist $t \mapsto \exp(-|t|^k)$ die charakteristische Funktion einer ZV (bzw. von deren Verteilung) ?

28) Verwenden Sie die Inversionsformel für die Fouriertransformierte (charakteristische Funktion) integrierbarer Funktionen zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsdichten zu folgenden charakteristischen Funktionen:

(a) [2 Punkte] $\varphi(t) = e^{-|t|}$,

(b) [2 Punkte] $\varphi(t) = \left(1 - \dfrac{|t|}{a}\right) \mathbf{1}_{\{|t| \le a\}}$.

29) [2 Punkte] Seien P_n, $n \in \mathbb{N}_0$, Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ mit charakteristischen Funktionen φ_n und sei $p(\cdot)$ eine diskrete Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass für das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot P_n$$

die charakteristische Funktion durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot \varphi_n(t)$$

gegeben ist.

<u>Hinweis</u>: Zeigen sie dies zunächst für endliche Summen (d.h., wenn $p(n) = 0$ für $n > N$) und verwenden Sie schwache Konvergenz.