Übungen zu **Wahrscheinlichkeitstheorie**

Anna Muranova, Wolfgang Woess – SS 2020

---

30) [3 Punkte] Die Zufallsvariablen $T, X_1, X_2, X_3, \ldots$ seien unabhängig, wobei T Werte in $\mathbb{N}_0$ annimmt und die X_n identisch verteilt sind (und daher die gleiche charakteristische Funktion φ_X haben). Sei

$$Z(\omega) = \sum_{n=0}^{T(\omega)} X_n(\omega).$$

Drücken Sie die charakteristische Funktion von Z durch φ_X sowie die Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion f_T von T aus, wobei

$$f_T(t) = \mathbb{E}(t^N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[T = n]\, t^n\,, \quad t \in \mathbb{C}\,,\ |t| \leq 1.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass die Verteilung von Z als Reihe von Verteilungen geschrieben werden kann, so wie in Bsp. 29.

31) [3 Punkte] Ein Glücksspiel verläuft wie folgt: in einer Urne befinden sich rote und schwarze Kugeln im Verhältnis $\theta : 1 - \theta$, wobei $0 < \theta < 1$. Sie dürfen Kugeln (mit Zurücklegen) ziehen, bis Sie zum ersten Mal eine schwarze ziehen. Für jede der Ziehungen einer roten Kugel ziehen Sie ein Los, durch welches Sie mit Wahrscheinlichkeit 1/2 nichts gewinnen oder verlieren, bzw. jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/4 einen Euro gewinnen, bzw. verlieren.
Sei Z Ihr Gewinn am Ende des Spiels. Berechnen Sie die charakteristische Funktion von Z. Verwenden Sie diese, um Erwartungswert und Varianz von Z zu bestimmen.

Verwenden Sie für die Rechnungen in 32b und 33ab den zentralen Grenzverteilungssatz gemäß Variante 1 von Video (θ im Mittelbereich).

32) (a) [2 Punkte] Bei einem Glücksspiel gewinnt der Spieler mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ sechs Euro hinzu, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ verliert er einen Euro und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ gewinnt bzw. verliert er nichts. Bestimmen Sie approximativ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler nach 100 Spielen einen Gewinn zwischen 47 und 53 Euro erzielt hat.
(b) [2 Punkte] Wie oft muss der Spieler das Spiel wiederholen, damit die Wahrscheinlichkeit mehr als 100 Euro gewonnen zu haben mindestens 0,9 beträgt?

Verwenden Sie für die folgenden Rechnungen den zentralen Grenzverteilungssatz gemäß Variante 1 von Video (θ im Mittelbereich).

33) (a) [1 Punkt] Wie oft muss man eine faire Münze werfen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,95 der Anteil der geworfenen Köpfe zwischen $49,8\%$ und $50,2\%$ liegt?

(b) [2 Punkte] Ein Flugzeug hat 500 Sitze. Man weiß, dass im Schnitt 20 Prozent der Leute mit Ticket nicht erscheinen. Wie viele Tickets kann man (approximativ) höchstens verkaufen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% jeder einen Sitzplatz bekommt?

34) [2 Punkte] Erinnern Sie sich an das Beispiel mit den 2 Urnen: Urne 1 enthält 10 Kugeln, davon R_1 rote und die anderen weiß. Urne 2 enthält 9 Kugeln, davon R_2 rote und die anderen weiß.

Schritt 1: eine Kugel wird aus Urne 1 gezogen und in Urne 2 transferiert. Zufallsvariable $X_1 = 1$ wenn die Kugel rot ist, $= 0$, sonst.

Schritt 2: danach wird eine Kugel aus Urne 2 gezogen. Zufallsvariable X_2 analog.

Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X_2 \mid X_1)$.