Übungen zu **Wahrscheinlichkeitstheorie**

Anna Muranova, Wolfgang Woess – SS 2020

---

35) [2 Punkte] Sei X exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$, und sei $Z = \lfloor X \rfloor$ der ganzzahlige Anteil von X (d.h., wenn $X(\omega) \in [k\,,\, k+1)$ dann $Z(\omega) = k$, wo $k \in \mathbb{N}_0$). Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X \mid Z)$ und $\mathbb{E}(Z \mid X)$.

36) (a) [2 Punkte] Sei (X, Y) eine 2-dimensionale ZV mit gemeinsamer Dichte $f(x, y)$ bezüglich dem Lebesguemaß. X wird als integrierbar vorausgesetzt. Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X \mid Y)$ mit Hilfe der gemeinsamen Dichte sowie der Randdichte von Z.

Hinweise: (1) Erinnern Sie sich an die Beschaffenheit von $\sigma(Y)$ und an die Beziehung $\mathbf{1}_{Y^{-1}(B)} = \mathbf{1}_B(Y)$ für $B \subset R$.
(2) Gemäß einem Lemma der Vorlesung muss $\mathbb{E}(X \mid Y) = g(Y)$ sein, wobei $y \mapsto g(y)$ eine Borel-messbare Funktion ist. Diese Funktion ist durch Einsetzen in die Definition der bedingten Erwartung zu bestimmen.

(b) [2 Punkte] Sei (X, Y) 2-dimensional normalverteilt wie in Beispiel 14, mit $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

37) [3 Punkte] Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}^d$ und diskreter Dichte $p(x) = \mathbb{P}[X_n = x]$, $x \in \mathbb{Z}^d$. Wir bilden die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $S_0 = 0$ (Nullvektor).
Zusatzannahme: jedes $x \in \mathbb{Z}^d$ ist erreichbar in dem Sinn dass ein $n \in N$ existiert, sodass $\mathbb{P}[S_n = x] > 0$. (Mit anderen Worten: es gibt $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^d$ sodass $p(x_k) > 0$ für alle k, und $x = x_1 + \cdots + x_n$.)
Nun sei $h : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ eine Funktion sodass die ZV $h(X_1)$ integrierbar ist. Zeigen sie: die Folge $\big(h(S_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Martingal genau dann wenn für alle $x \in \mathbb{Z}^d$

$$h(x) = \sum_y p(y) h(x + y)\,.$$

38) [2 Punkte] Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, reller Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_n) = 0$ und $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$. Wir bilden die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $M_n = (X_1 + \cdots + X_n)^2$, $M_0 = 0$.

Zeigen sie, dass die Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Submartingal ist.

39) [2 Punkte] Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger reeller Zufallsvariablen mit Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, 1)$ und $Y_n = e^{X_n}$. Wir bilden die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $M_n = Y_1 \cdot Y_2 \cdots Y_n$, $M_0 = 1$.

Bestimmen Sie μ so, dass die Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist. Was ist der Grenzwert ?