Computermathematik – Übung Sage 1

- **Abgabeschluss:** Di 2. 12. um 23:59
- **Präsentation:** Mi 3. 12. in der Übungsgruppe
- **Abgabeformat:** `.sws` mit Worksheet-Namen `BspX_Nachname_Vorname` ($\texttt{X} \in \{\texttt{9}, \texttt{10}, \texttt{B4}\}$)

Aufgabe 9 – Zahlen (4 Punkte)

Wandle deinen Namen in eine Zahl N um nach folgendem Schema:
Maria $\mapsto$ (m, a, r, i, a) $\mapsto (12, 0, 17, 8, 0) \mapsto 12 \cdot 26^0 + 0 \cdot 26^1 + 17 \cdot 26^2 + 8 \cdot 26^3 + 0 \cdot 26^4 = N$, im Beispiel $N = 152112$. (Hint: `ord('a')`. Die Umwandlung muss nicht automatisiert in einer Funktion passieren.) Berechne außerdem $n = p^N \mod 24122014$, wobei p deine Lieblings-Primzahl ist. Untersuche die Zahl n auf einige interessante Eigenschaften, beispielsweise:

- Ist n eine Primzahl? Wie weit ist die nächstgelegene Primzahlen entfernt?
- Welche Primfaktoren hat sie? Sind darunter mehrfache Primfaktoren?
  Gibt es gemeinsame Primfaktoren mit der Zahl 2014?
- Wieviele dezimale und binäre Ziffern hat die Zahl?
  Wie sehen die dezimale und binäre Quersumme (Summe der Ziffern) aus?
- Ist $\sqrt{n}$ eine rationale oder irrationale Zahl?
  Welche Ziffer steht an der n-ten Nachkommastelle von $\sqrt{n}$?
- Welche Rechenoperationen kann man mit einer Zahl dieser Größe noch ausführen – $2 \cdot n$? n^2? 2^n? $n!$? n^n? Dauert eine Schleife mit so viel Durchläufen lang? (Notfalls via Action→Interrupt abbrechen. Ergebnisse vorm Abgeben löschen!)

Aufgabe 10 – Goldbachsche Vermutung (4 Punkte)

Die (bislang nicht bewiesene) Goldbachsche Vermutung besagt, dass sich jede gerade Zahl (≥ 4) als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt; beispielsweise ist $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$ und so weiter. Überprüfe diese Vermutung so weit wie möglich (z.B. für Zahlen bis 1 000 oder bis 10 000). Finde heraus, für welche der geprüften Zahlen es die meisten solchen Zerlegungen gibt.

Hint: die Funktion `prime_range(n)` gibt eine Liste aller Primzahlen kleiner n zurück. Verwende Schleifen, um alle zu prüfenden Zahlen bzw. alle Primzahlkandidaten durchzulaufen. Man kann die Rechenzeit optimieren, indem man manches vorberechnet. Das Ausgabeformat ist egal (alle Ergebnisse printen oder in Liste speichern oder nur interessante Werte wie das bisherige Maximum an Zerlegungen mitschreiben).

Bonus – Goldbachsche Vermutung graphisch (2 Bonuspunkte)

Veranschauliche die Ergebnisse zur Anzahl verschiedener Zerlegungen aus Aufgabe 10 graphisch. Zeichne dazu einen Punkt für jede überprüfte Zahl zusammen in einem Koordinatensystem: Die x-Koordinate gibt die untersuchte Zahl an, die y-Koordinate die Anzahl der möglichen Darstellungen dieser Zahl als Summe von zwei Primzahlen.

Die Grafik kann entweder in LaTeX mit TikZ erstellt werden (die Zahlenwerte als Liste aus Sage kopieren, oder direkt in Sage den TikZ-Code erzeugen und printen); oder du findest heraus, wie man Punkte in Sage in einem Koordinatensystem graphisch darstellt (Hint: `point()`, `show()`).