Computermathematik – Übung Sage 1

- **Abgabeschluss:** Di 17. 11. 2015 um 20:00
- **Präsentation:** Mi 18. 11. 2015 in der Übungsgruppe
- **Abgabeformat:** `.sws` mit Worksheet-Namen `BspX_Nachname_Vorname` ($\texttt{X} \in \{\texttt{9}, \texttt{10}, \texttt{B4}\}$)

Aufgabe 9 – Goldbachsche Vermutung (4 Punkte)

Die (bislang nicht bewiesene) Goldbachsche Vermutung besagt, dass sich jede gerade Zahl ≥ 4 als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt; beispielsweise ist $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$ und so weiter. Überprüfe diese Vermutung so weit wie möglich (z.B. für Zahlen bis 1 000 oder bis 10 000), und gib für jede geprüfte Zahl eine solche Zerlegung aus.

Hint: die Funktion `prime_range(n)` gibt eine Liste aller Primzahlen kleiner n zurück. Verwende Schleifen, um alle zu prüfenden Zahlen bzw. alle Primzahlkandidaten durchzulaufen.

Aufgabe 10 – Numerische Genauigkeit (4 Punkte)

(a) Die folgenden Rechnungen sollen mit etwa 4 Dezimalstellen Genauigkeit gerechnet werden. Wie vielen Bits Genauigkeit entspricht das ungefähr?
Hint: Falls unsicher, vergleiche die Anzahl von dezimalen und binären Stellen verschieden großer ganzer Zahlen `x` mittels `x.digits(base=2)`.

(b) Was bedeutet „4 Dezimalstellen Genauigkeit" eigentlich in Sage (Stichwörter: Fixkommazahl, Gleitkommazahl)? Demonstriere anhand der Zahlen $0.001, 0.0001, \ldots, 0.0000001$ sowie $0.123, 0.1234, \ldots, 0.1234567$.
Hint: Verwende `R = RealField(bits)`, um den passenden Datentyp für die gewünschte Genauigkeit anzulegen, und `R(x)`, um die Zahl `x` auf entsprechende Genauigkeit zu konvertieren. `x.str(truncate=False)` gibt die Zahl `x` genau so aus wie gespeichert (ohne wie üblich die letzten, ungenauen Stellen zu runden).

(c) Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ ist bekanntlich definiert durch den Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Wir versuchen, diese Ableitung für $f(x) = \sqrt{x}$ in $x_0 = 0.2$ numerisch zu approximieren, indem wir den Ausdruck für kleine Werte von h auswerten. Berechne das Ergebnis für $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$, wenn alle Werte 14 Bits Genauigkeit haben. Vergleiche mit dem exakten Ergebnis $f'(0.2) = 1/(2 \cdot \sqrt{0.2})$. Was fällt auf? Wie könnte dieser Effekt erklärt werden?

Bonus – Goldbachsche Vermutung graphisch (2 Bonuspunkte)

Finde in Aufgabe 9 für jede geprüfte Zahl auch heraus, wie viele gültige Zerlegungen als Primzahlsumme es gibt. Veranschauliche die Ergebnisse in einem Plot, in dem für jede geprüfte Zahl (x-Koordinate) deren Anzahl an Zerlegungen (y-Koordinate) aufgetragen ist. Der Plot kann entweder in LaTeX mit TikZ erstellt werden (z.B. mit Package `pgfplots`, oder händisch; unter Verwendung der Ergebnisse aus Sage); oder du findest heraus, wie man in Sage Punkte in einem Koordinatensystem plottet (*Hint:* `point()`, `show()`).