Computermathematik – Übung `Sage4`

- **Abgabeschluss:** Di 08.01.2019 um 14:00
- **Präsentation:** Mi 09.01.2019
- **Abgabeformat:** `Sage4.zip` / `Aufgabe14.sws`, `Aufgabe15.sws`.

Aufgabe 14 – Rekursive Funktionen (2 + 3 Punkte)

(a) Implementiere in `Sage` eine Funktion `catalan`(n), folgende rekursive Folge berechnet:

$$c_0 = 1, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\, c_{n-1-k}$$

(b) Die *Legendrepolynome*[1] sind rekursiv definiert durch

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

- Implementiere eine rekursive Funktion für die Legendrepolyome.
- Verifiziere die Relation

  $$\int_{-1}^{1} L_m(x)\, L_n(x)\, dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

  für $0 \leq m, n \leq 10$.
- zeichne die Graphen von $L_n(x)$ für $0 \leq n \leq 7$ in verschiedenen Farben auf dem Intervall $[-1, 1]$ in einem gemeinsamen Bild.
- ditto für die Kurven $r_n(\theta) = L_n(\cos(\theta))$ in Polarkoordinaten.
- Zeichne den Absolutbetrag $r(\theta, \psi) = |\operatorname{Re} Y_{m,n}(\theta, \psi)|$ des Realteils der sogenannten *Kugelfunktionen*

  $$Y_{m,n}(\theta, \psi) = e^{im\psi} L_n(\cos(\theta))$$

  für verschiedene (kleine) Werte von m und n in 3 Dimensionen, und zwar so, daß der positive Teil rot und der negative Teil blau eingefärbt ist[2].

Hinweise: `polar_plot`, `spherical_plot3d`.

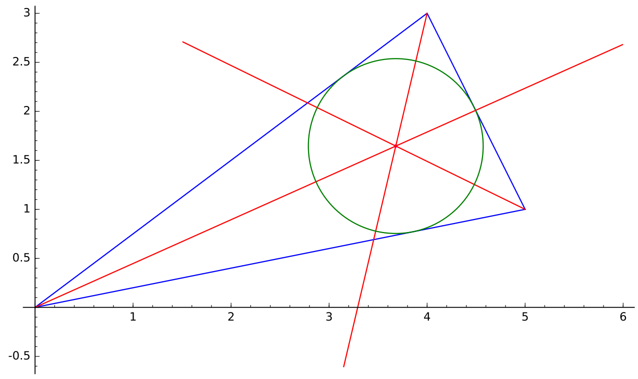
---

[1] A.-M. Legendre (1752–1833)

[2] etwa so wie auf den Bildern in Wikipedia `https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics`

Aufgabe 15 – Trigonometrie in der Ebene (4 Punkte)

Implementiere in `Sage` eine Funktion `inkreis`(A, B, C), die aus drei gegebenen Punkten A, B, C den Inkreismittelpunkt des aufgespannten Dreiecks berechnet und das Dreieck (blau) samt Winkelsymmetralen (rot) und Inkreis (grün) zeichnet, in etwa wie im Bild:



Hinweise: `vector`, `norm`, `line`, `circle`, `point`