Übungen

Anmerkung

Die mit $\boxed{\text{A}}$ gekennzeichneten Beispiele betreffen nur die Übungsgruppen, die vor 18:00 stattfinden (das sind die Gruppen 1, 3, 5, 6, 9); alle anderen Gruppen finden nach 18:00 statt und rechnen die jeweils mit $\boxed{\text{B}}$ gekennzeichneten Beispiele. Beispiele, die weder mit $\boxed{\text{A}}$ noch $\boxed{\text{B}}$ gekennzeichnet sind, sind von *allen* Gruppen zu rechnen.

Übungsmodus

Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer haben die Möglichkeit, die jeweils in der Vorwoche am Ende der Vorlesung oder unter der Adresse

`http://www.math.tugraz.at/mathc/diskmath/dm_2006.html`

bekanntgegebenen Übungsbeispiele eigenständig vorzubereiten. Die vorbereiteten Beispiele können in einer vor Übungsbeginn aufliegenden oder aushängenden Liste angekreuzt werden. Der Gruppenleiter oder die Gruppenleiterin ruft aufgrund dieser Liste jeweils einen Teilnehmer oder eine Teilnehmerin an die Tafel, der oder die das Beispiel an der Tafel so präsentiert, daß es die Kolleginnen und Kollegen es hinterher verstehen. Dafür werden bis zu vier Punkte vergeben.
Zu Semesterende wird hieraus der folgende **Erfolgskoeffizient** bestimmt:

$$e = \frac{\text{Tafelpunkte } + \text{Anzahl der angekreuzten Beispiele}}{\text{Gesamtzahl der Übungsbeispiele}}$$

Die "Gesamtzahl der Übungsbeispiele" ist die Anzahl der über das ganze Semester möglich gewesenen Kreuze und muß nicht mit der Numerierung der Beispiele im Skriptum übereinstimmen. Insbesondere kann sie je nach Arbeitstempo in den einzelnen Übungsgruppen verschieden sein.
Außerdem findet zur Semesterhälfte und zu Semesterende jeweils ein schriftlicher **Test** statt, bei dem jeweils bis zu 30 Punkte zu erreichen sind. Die **Gesamtpunktezahl** ermittelt sich aus der Formel

$$p = \text{Punkte aus Test 1} + \text{Punkte aus Test 2} + 40 \times e$$

Die Gesamtnote errechnet sich nach der folgenden Tabelle:

Punkte	Note
$40 < p \leq 51$	Genügend
$51 < p \leq 62$	Befriedigend
$62 < p \leq 73$	Gut
$73 < p$	Sehr Gut

A. Matrizen und Determinanten.

Übung 0. Der Student K. hat 58 von 71 Übungsbeispielen angekreuzt und 9 Tafelpunkte erhalten. Auf die beiden Tests hat er jeweils 23 und 20 Punkte bekommen. Welche Note wird in seinem Zeugnis stehen?

Übung 1. Seien $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) \end{aligned}$$

linear ist.

(2 P.)

Übung 2. Finden Sie Zahlen α und β, sodaß

$$\boxed{\text{A}} \quad \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{B}} \quad \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2P.)

Übung 3. Bestimmen Sie den von den Vektoren

$$\boxed{\text{A}} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{B}} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

aufgespannten Winkel.

(2P.)

Übung 4. Berechnen Sie das Matrixprodukt

$$\boxed{\text{A}} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{B}} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2P.)

Übung 5. Berechnen Sie die Matrixprodukte

$$\boxed{\text{A}} \qquad (a) \quad \begin{pmatrix} 1, 3, -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, -2, 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{B}} \qquad (a) \quad \begin{pmatrix} -1, 2, 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2, -1, 3 \end{pmatrix}$$

(je 1P.)

Übung 6. Ganzzahlige Potenzen von Matrizen sind definiert als

$$A^n = \begin{cases} A \cdot A \cdots A & n > 0 \\ I & n = 0 \\ A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots A^{-1} & n < 0 \end{cases} \qquad \text{(jeweils } |n| \text{ Faktoren).}$$

Berechnen Sie die folgenden Produkte und Potenzen von Matrizen:

$\boxed{\text{A}}$ (a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{B}}$ (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4$

(je 2 P.)

Übung 7. Berechnen Sie

$\boxed{\text{A}}$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}^{25} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}^{-25}$$

$\boxed{\text{B}}$ $$\begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{25} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-25}.$$

(2 P.)

Übung 8. Finden Sie 2×2 Matrizen A und B, für die gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$.

(1 P.)

Übung 9. Zeigen Sie, daß eine 2×2-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, die mit allen anderen Matrizen kommutiert (d.h. $A \cdot B = B \cdot A$ für jede beliebige 2×2 Matrix B), ein Vielfaches der Einheitsmatrix I sein muß, d.h. $a = d$ sowie $b = c = 0$.
Hinweis: gute Testkandidaten sind $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(3 P.)

Übung 10. Berechnen und vereinfachen Sie (Additionstheoreme für Winkelfunktionen!) das folgende Matrixprodukt:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Wie sieht die Inverse

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1}$$

aus?

(3 P.)

Übung 11. Zeigen Sie, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

keine Inverse besitzt, wenn $ad - bc = 0$.
Hinweis: Finden Sie eine Matrix $B \neq 0$, sodaß $A \cdot B = 0$ und führen Sie die Annahme, daß eine Matrix C mit $CA = I$ existiert, zu einem Widerspruch.

(4 P.)

Übung 12. Seien A und B reguläre $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, daß die Matrix $A \cdot B$ regulär ist mit Inverser

$$B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

(2 P.)

Übung 13. Berechnen Sie die Determinante

$$\boxed{\text{A}} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \boxed{\text{B}} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

(a) nach der Regel von Beispiel (A.3.5).
(b) anhand von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen.

(2+2 P.)

Übung 14. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\boxed{\text{A}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{B}} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3 P.)

Übung 15. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\boxed{\text{A}}\quad \begin{aligned} -8\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3 &= 1 \\ 11\,x_1 - 7\,x_2 - 3\,x_3 &= 0 \\ -3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad\qquad \boxed{\text{B}}\quad \begin{aligned} -7\,x_1 + 11\,x_2 - 3\,x_3 &= 1 \\ 4\,x_1 - 8\,x_2 + 3\,x_3 &= 0 \\ 2\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(a) mithilfe der Cramerschen Regel (A.3.15)

(b) indem Sie das System auf die Form $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ bringen und die Koeffizientenmatrix A explizit invertieren (Satz (A.3.13)).

(3+3 P.)

Übung 16. Berechnen Sie die Determinante

$$\boxed{\text{A}}\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -9 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad\qquad \boxed{\text{B}}\quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 11 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(3P.)

B. Zahlen und Kongruenzen.

Übung 17. Der Divisionssatz besagt, daß es für jedes Zahlenpaar $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ gibt, sodaß $n = qm + r$. Verfassen Sie einen Algorithmus, der nur unter Verwendung der Operationen $+$ (Addition) und $-$ (Subtraktion) bei Eingabe von m und n die Zahlen q und r findet.

(2 P.)

Übung 18. Schreiben Sie den euklidischen Algorithmus zur Berechnung des $\mathrm{ggT}(m, n)$ detailliert als "Programm" nieder.

(3 P.)

Übung 19. Finden Sie mithilfe des euklidischen Algorithmus für jedes der folgenden Zahlenpaare (m, n) den größten gemeinsamen Teiler d und Zahlen a und b, sodaß $am + bn = d$.

(a)	$\boxed{\text{A}}$ $(187, 17)$	$\boxed{\text{B}}$ $(119, 76)$
(b)	$\boxed{\text{A}}$ $(144, 89)$	$\boxed{\text{B}}$ $(178, 110)$

(je 2 P.)

Übung 20. Zeigen Sie, daß mit der Primfaktorzerlegung $n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_n(p)}$ gilt

$$\mathrm{ggT}(m, n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\nu_m(p), \nu_n(p))}.$$

Überprüfen sie dies anhand der Beispiele aus Übung 19.

(3 P.)

Übung 21. Das *kleinste gemeinsame Vielfache* zweier natürlicher Zahlen m und n ist die Zahl definiert durch

$$\mathrm{kgV}(m, n) = \min\{\, \ell \in \mathbb{N} : m \,\big|\, \ell \text{ und } n \,\big|\, \ell \,\}.$$

Zeige, daß

$$\mathrm{kgV}(m, n) \cdot \mathrm{ggT}(m, n) = m \cdot n$$

(4 P.)

Übung 22. (a) Warum genügt es, nur bis $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ zu gehen, um festzustellen, ob eine Zahl n eine Primzahl ist?

(b) Verfassen Sie einen möglichst ökonomischen Algorithmus, der für gegebenes n alle Primzahlen $p \leq n$ bestimmt.

Hinweis: Gehen Sie rekursiv vor. Wenn Sie alle Primzahlen $\leq n - 1$ haben, überprüfen Sie, ob auch n Primzahl ist und fügen Sie gegebenenfalls n zur Liste hinzu.

(1+3 P.)

Übung 23. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß jede natürliche Zahl (außer 1) durch wenigstens eine Primzahl teilbar ist.

(4 P.)

Übung 24. Beweisen Sie den folgenden Satz von Euklid (Buch IX, Prop. 20): *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*
Hinweis: Widerspruchsbeweis. Finden Sie zu jeder gegebenen endlichen Menge von Primzahlen $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ eine neue Zahl, die durch keine der p_i teilbar ist.

(3 P.)

Übung 25. Verfassen Sie einen Algorithmus, der bei Vorliegen aller Primzahlen $\leq n$ die Primfaktoren-Zerlegung von $n \in \mathbb{N}$ bestimmt.

(3 P.)

Übung 26. Die Europäische Zentralbank beschließt im Jahr 2037, zur Vereinfachung des Zahlungsverkehrs nur noch Scheine mit den Werten 130€ und 231€ zuzulassen. Wie kann man dann eine Stecknadel zum Preis von einem Euro bezahlen?

(2 P.)

Übung 27. Seien m und n ganze Zahlen. Zeigen Sie: wenn ganze Zahlen a und b existieren mit $am + bn = 1$, dann ist $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

(4 P.)

Übung 28. Zeigen Sie (unter Zuhilfenahme des vorhergehenden Beispiels): wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = d$, dann ist $\mathrm{ggT}(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$.

(3 P.)

Übung 29. Sei F_n die Folge der Fibonacci-Zahlen, gegeben durch die Rekursion

$$F_0 = F_1 = 1 \qquad\qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Zeige, daß $\mathrm{ggT}(F_n, F_{n+1}) = 1$ für jedes n (Induktion).

(2P.)

Übung 30. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sodaß $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Zeige, daß $\mathrm{ggT}(m + n, m - n) = 1$ oder 2.

(2 P.)

****

Die in den Aufgaben 31–44 angegebenen Relationen sind auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität zu untersuchen. Stellen Sie auch fest, ob jeweils eine Äquivalenzrelation oder Halbordnungsrelation vorliegt.

Übung 31. Sei X die Menge der Österreicherinnen und Österreicher mit der Relation

$$x \,\mathrm{R}\, y \iff x \text{ ist mit } y \text{ verheiratet.}$$

(1 P.)

Übung 32. Menge X = Erdbevölkerung, Relation

$$x \,\mathrm{R}\, y \iff x \text{ und } y \text{ haben den gleichen Geburtsort.}$$

(1 P.)

Übung 33. Menge $X = \mathbb{R}$, Relation $x \,\mathrm{R}\, y \iff x \leq y$.

(1 P.)

Übung 34. Menge $X = \mathbb{Z}$, Relation $x \,\mathrm{R}\, y \iff x \equiv y \ (m)$.

(1 P.)

Übung 35. Menge $X = \mathbb{C}$, Relation $z_1 \,\mathrm{R}\, z_2 \iff \operatorname{Re} z_1 \leq \operatorname{Re} z_2$.

(1 P.)

Übung 36. Menge $X = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n > 0 \ \forall \ n \right\}$, Relation

$$(a_n) \,\mathrm{R}\, (b_n) \iff \lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$$

(3 P.)

Übung 37. Menge X beliebig, Gleichheitsrelation $x = y$.

(1 P.)

Übung 38. Menge X beliebig, Ungleichheitsrelation $x \neq y$.

(1 P.)

Übung 39. $X = \mathbb{N}$, $m \,\mathrm{R}\, n \iff m \mid n$

(1 P.)

Übung 40. $X = \mathbb{N}$, $m \,\mathrm{R}\, n \iff m - n = 7$

(1 P.)

Übung 41. $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$, $(m, n) \,\mathrm{R}\, (p, q) \iff mq = np$

(2 P.)

Übung 42. $X = \mathbb{N}$, $m \,\mathrm{R}\, n \iff \operatorname{ggT}(m, n) = 16$

(1 P.)

Übung 43. $X = \mathbb{R}$, $x \,\mathrm{R}\, y \iff x \cdot y \geq 0$

(2 P.)

Übung 44. $X = \mathbb{R}$, $x \,\mathrm{R}\, y \iff x \cdot y > 0$

(2 P.)

Übung 45. Geben Sie Beispiele von (Halb)ordnungsrelationen an.

(1 P./Beispiel)

Übung 46. Erstellen Sie die Additions- und Multiplikationstafeln für
(a) $\mathbb{Z}_5$
(b) $\mathbb{Z}_8$.

(2+2 P.)

Übung 47. Zeige, daß die Zahlen a, $2a, \ldots$, $(p-1)a$ alle verschiedene Reste modulo p haben, wenn p eine Primzahl und $a \not\equiv 0 \mod p$ ist.

(3 P.)

Übung 48. *Dividieren in $\mathbb{Z}_n$.* Die Inverse $[m]^{-1}$ einer ganzen Zahl m in $\mathbb{Z}_n$ (geschrieben $m^{-1} \mod n$) ist die Restklasse $[x]$ einer ganze Zahl x, für die gilt, daß $[x]_n \cdot [m]_n = [1]_n$. Mit anderen Worten, man muß zwei Zahlen x und y finden, sodaß $x \cdot m + y \cdot n = 1$. Wann ist dies möglich?

(4 P.)

Übung 49. Finden Sie, wenn möglich, die Inversen

$\boxed{\text{A}}$ von (a) $5 \mod 173$ sowie (b) $2 \mod 346$,

$\boxed{\text{B}}$ von (a) $5 \mod 175$ sowie (b) $3 \mod 346$

(je 2 P.)

Übung 50. Zeigen Sie die *Elferprobe*: Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, d.h., mit der Ziffernentwicklung

$$n = \sum a_i 10^i$$

ist n durch 11 teilbar genau dann, wenn

$$\sum a_i (-1)^i$$

durch 11 teilbar ist. Ist die Zahl 1213141516171819 durch 11 teilbar?

(2P.)

Übung 51. Lösen Sie die folgenden simultanen Kongruenzen mithilfe des chinesischen Restsatzes (vgl. Skriptum (A.1.12), (A.3.13) und (A.3.14)).

$\boxed{\text{A}}$ $x \equiv 3 \mod 8$ $\quad x \equiv 1 \mod 5$ $\quad x \equiv 5 \mod 9$

$\boxed{\text{B}}$ $x \equiv 1 \mod 11$ $\quad x \equiv 3 \mod 15$ $\quad x \equiv 5 \mod 7$

(2 P.)

Übung 52. Zeigen Sie, daß die folgende Aussage richtig ist:

$$a \equiv b \ (m_1) \text{ und } a \equiv b \ (m_2) \implies a \equiv b \ (m) \quad \text{für} \quad m = \mathrm{kgV}(m_1, m_2)\,.$$

Ist insbesondere $\mathrm{ggT}(m_1, m_2) = 1$, dann gilt also $a \equiv b \ (m_1 m_2)$.

(4 P.)

Übung 53. Hat das folgende Gleichungssystem eine Lösung? Wenn ja, dann bestimmen Sie diese.

$$\boxed{\text{A}} \quad \begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 2 \mod 9 \\ x &\equiv 1 \mod 10 \end{aligned} \qquad \boxed{\text{B}} \quad \begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 5 \\ x &\equiv 3 \mod 9 \\ x &\equiv 1 \mod 10 \end{aligned}$$

(3 P.)

Übung 54. Die Rechenregeln für Matrizen aus Kapitel A gelten auch in $\mathbb{Z}_p$, wenn p eine Primzahl ist. Berechnen Sie das Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1 P.)

Übung 55. Lösen Sie (z.B. mit der Cramerschen Regel) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2\,y &= 4 \\ 4\,x + 3\,y &= 4 \end{aligned}$$

in $\mathbb{Z}_7$. Wie sieht es mit einer Lösung in $\mathbb{Z}_5$ aus?

(3 P.)

Übung 56. Berechnen Sie (ohne Taschenrechner), mit Hilfe des Satzes von Euler-Fermat die Zahlen

$$2^{32} \mod 11 \qquad\qquad 2^{(2^{32})} \mod 11\,.$$

Hinweis: $2^{m \cdot n} = (2^m)^n$.

(2+3 P.)

Übung 57. Eines der ersten Verschlüsselungssysteme stammt von Julius Caesar. Den Buchstaben des lateinischen Alphabets entsprechen die Zahlen $0, 1, \dots, 25$ modulo 26 und die Verschlüsselung besteht in der Addition einer fixen Zahl, konkret $f(k) = k + 6$. Entschlüsseln Sie die Botschaft *“GRKG OGIZG KYZ”*.

(2 P.)

Übung 58. Sei $m = pq$ und $\operatorname{ggT}(r, \varphi(m)) = 1$. Satz (B.1.9) besagt, daß es ein $s \in \mathbb{Z}$ gibt sodaß $rs \equiv 1 \mod \varphi(m)$. Warum stimmt die Behauptung (nach (B.5.4)), daß $s \in \mathbb{N}$, d.h. $s > 0$, gewählt werden kann?

(3P.)

Übung 59. Gegeben seien $m = 2491$ und $r = 957$ sowie die mit der Konvention von Beispiel (B.5.7) aus der Vorlesung verschlüsselte Zahlenfolge $(1137, 2221, 2014, 111)$. Finden Sie den inversen Schlüssel s und entschlüsseln Sie die Botschaft.
Hinweis: Wahrscheinlich Computer erforderlich.

(4P.)

Übung 60. Sei n eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß $2^n - 1$ eine Primzahl ist. Zeige, daß auch n eine Primzahl sein muß.
Die Umkehrung gilt nicht: Finde die kleinste Primzahl p, sodaß $2^p - 1$ keine Primzahl ist.
Hinweise:

$$x^{pq} = (x^p)^q \qquad\qquad x^s - 1 = (x - 1)(1 + x + \cdots + x^{s-1})$$

(2P.)

C. Grundlagen der Logik.

Übung 61. Konstruieren Sie Wahrheitstafeln für die folgenden Formeln:

$\boxed{\text{A}}$ $((A \wedge B) \wedge (\neg B \vee C))$

$\boxed{\text{B}}$ $(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$

(2P.)

Übung 62. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen und beantworten Sie anhand von Wahrheitstafeln die untenstehende Frage:

(a) Jeder, der ein gutes Gehör hat, kann richtig singen.
(b) Jeder, der gut Klavier spielen kann, kann seine Zuhörerschaft begeistern.
(c) Niemand ist ein wahrhafter Musiker, wenn er nicht seine Zuhörerschaft begeistern kann.
(d) Jemand, der kein gutes Gehör hat, kann seine Zuhörerschaft nicht begeistern.
(e) Niemand, außer einem wahrhaften Musiker, kann eine Symphonie schreiben.

Welche Eigenschaften muß jemand notwendigerweise besitzen, um eine Symphonie zu schreiben?

(3P.)

Übung 63. Zeigen Sie mithilfe von Wahrheitstafeln:

$\boxed{\text{A}}$ Sei A eine Tautologie, B eine beliebige Formel, dann gilt

$$A \vee B \Leftrightarrow A \qquad A \wedge B \Leftrightarrow B$$

$\boxed{\text{B}}$ Sei B eine beliebige Formel, C unerfüllbar. Dann gilt:

$$B \vee C \Leftrightarrow B \qquad B \wedge C \Leftrightarrow C$$

(2P.)

Übung 64. Inspektor D befragt drei Verdächtige – A, B und C – für eine Tat. Er weiß, daß genau eine der drei Personen schuld ist und jede Person einmal lügt und einmal die Wahrheit sagt.

A sagt: Ich war es nicht. B hat es getan.
B sagt: Ich war es nicht. Ich weiß, daß C es getan hat.
C sagt: Ich war es nicht. B weiß nicht wer es war.

Wer hat es getan?

(3P.)

Übung 65. In einer Stadt sagen alle Politiker immer die Unwahrheit, während alle anderen immer die Wahrheit sagen. Ein Zugereister führt eine Befragung durch und erhält folgende Antworten.

A sagt: "B ist ein Politiker."
B sagt: "Wenn A sagt, er sei kein Politiker, dann lügt er."
C sagt: "A ist kein Politiker."

Kann man daraus schließen, wer Politiker ist und wer nicht? Wenn ja, wer?

(3P.)

Übung 66. Zeigen Sie folgende Äquivalenzen anhand von Wahrheitstafeln:

(a) $$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

(b) $$A \to B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

(c) $$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$$

(2+2+2P.)

Übung 67. Seien A und B aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie

$\boxed{\text{A}}$ $A \Rightarrow B$ gilt genau dann, wenn $A \to B$ eine Tautologie ist.
$\boxed{\text{B}}$ $A \Leftrightarrow B$ gilt genau dann, wenn $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

(2P.)

Übung 68. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{L}_{\{|\}}$ ist vollständig.
(b) $\mathcal{L}_{\{\neg,\to\}}$ ist vollständig.
(c) $\mathcal{L}_{\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}}$ ist nicht vollständig.
(d) $\mathcal{L}_{\{\neg\}}$ ist nicht vollständig.

(3+3+4+2P.)

Hinweis zu (c): Zeigen Sie, daß $\neg A$ nicht darstellbar ist; dies ist äquivalent dazu, daß keine Kontradiktion in der Sprache enthalten ist: wenn $b(A_i) = W$, dann ist $\forall P \in \mathcal{L}\ \bar{b}(P) = W$

Übung 69. Geben Sie eine dreielementige Menge von Formeln an, die unerfüllbar ist, während jede zweielementige Teilmenge erfüllbar ist.

(4P.)

Übung 70. Bestimme alle paarweise nicht-äquivalenten Aussageformen, die aus den Variablen A und B sowie dem Junktor $\to$ (Implikation) aufgebaut werden können.

(3P.)

Übung 71. Seien A, B Formeln, sodaß $A \to B$ eine Tautologie ist. Wenn keine aussagenlogische Variable sowohl in A als auch in B vorkommt, dann ist entweder A unerfüllbar oder B eine Tautologie.

(4P.)

Übung 72. Beweisen Sie mit den Regeln des logischen Schließens den **Modus Tollens** $((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P$.

(3P.)

Übung 73. Zeigen Sie mit den Regeln des logischen Schließens auf möglichst elegante Weise die Allgemeingültigkeit des Ausdrucks

$\boxed{\text{A}}$ $B \to ((A \to (B \to A)) \to B)$
$\boxed{\text{B}}$ $(A \to B) \wedge (B \to C) \Longrightarrow (A \to C)$

(3P.)

Übung 74. Beweisen Sie die folgenden Subjunktionsgesetze:

$\boxed{\text{A}}$ $A \to (B \to C) \iff B \to (A \to C)$ (Tauschgesetz für Vorderglieder)

$\boxed{\text{B}}$ $A \to (B \to C) \iff (A \wedge B) \to C$ (Klammer-Änderungsgesetz für "$\to$")

(3P.)

Übung 75. Was ist falsch am folgenden Induktionsbeweis der Aussage:
"Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: je n Punkte der Ebene liegen auf einer Geraden".
"*Beweis*".
Induktionsanfang: Die Aussage gilt für $n = 1$ und $n = 2$.
Induktionsschritt: Angenommen, die Aussage ist für n wahr. Seien $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ Punkte. Nach Induktionsvoraussetzung liegen die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ auf einer Geraden g und $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_{n+1}$ auf einer Geraden h. Da aber sowohl g als auch h durch die Punkte P_1 und P_2 verlaufen, gilt $g = h$ und $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ liegen auf einer Geraden.

(3P.)

Übung 76. Bringen Sie die Formel

$\boxed{\text{A}}$ $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$

$\boxed{\text{B}}$ $A \to (B \leftrightarrow C)$

auf

(a) Disjunktive Normalform
(b) Konjunktive Normalform

(2+2P.)

Übung 77. Bestimmen Sie die Menge der Folgerungen, die aus der Prämissenmenge

$$P_1 :\iff A \to (B \to C) \qquad P_2 :\iff A \vee ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C)) \qquad P_3 :\iff B \to C$$

gezogen werden können.

(4P.)

Übung 78. Es seien die Funktionen $f_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ und für $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, |\}$ die jeweilige zweistellige Funktion $f_* : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ definiert wie die Wahrheitsfunktionen $F_\neg$, F_*, mit 0 statt F und 1 statt W.

(a) Drücken Sie die folgenden Funktionen durch $f_\neg$ und $f_\wedge$ aus:

$$g_1(x,y) = x + y \qquad g_2(x,y) = x \cdot y \qquad g_3(x) = x^2 + 1 \qquad g_4(x,y,z) = x \cdot y + z^3$$

Hier bedeuten $+$ und $\cdot$ Addition und Multiplikation modulo 2.

(je 2P.)

(b) Sei

$$f_\triangledown(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = y = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann läßt sich jede Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ durch $f_\triangledown$ ausdrücken.

(4P.)

(c) Drücken Sie die Funktionen aus (a) durch $f_\triangledown$ aus.

(je 2P.)

(d) Zeigen Sie, daß die Funktion $f_\triangledown$ wie in (b) und $f_|$ definiert durch

$$f_|(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

die einzigen zweistelligen Funktionen sind, die (jede für sich allein) alle Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ erzeugen.

(6P.)

Übung 79. Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Drücken Sie folgende Aussagen in einer Sprache mit Quantoren aus:

(a) Die f entsprechende Funktion ist injektiv.
(b) Die f entsprechende Funktion ist surjektiv.
(c) Die f entsprechende Funktion ist konstant.

(1+1+1P.)

Übung 80. Drücken Sie die Aussage

$$\forall x \exists y \forall z\, P(x,y,z)$$

unter alleiniger Verwendung des Existenzquantors $\exists$ und Negationaus.

(3P.)

Übung 81. Formalisieren Sie die Aussage
Eine natürliche Zahl ist durch 6 teilbar genau dann, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.

(3P.)

Übung 82. Drücken Sie folgende Aussagen über natürliche Zahlen mit Quantoren und den folgenden Symbolen aus: Konstante 0, Funktionssymbole S (einstellig), $+$ (zweistellig), $\cdot$ (zweistellig), mit der üblichen Interpretation in $\mathbb{N}$. (S ist die "Nachfolgerfunktion" $S(n) = n + 1$).

(a) x ist gerade.
(b) x ist ein Teiler von y.
(c) x ist kongruent zu $y \mod z$
(d) x ist eine Potenz von 2. (Hinweis: welche Teiler hat x?).

(1+1+1+1P.)

D. Elementare Abzählmethoden.

Übung 83. Auf einem Computersystem sind Dateinamen mit den Buchstaben A–Z (ohne Umlaute) und den Ziffern 0–9 erlaubt, wobei ein Dateiname nicht mit einer Ziffer beginnen und höchstens 11 Zeichen lang sein darf. Wieviele verschiedene Dateinamen gibt es?

(2P.)

Übung 84. Auf dem Planeten Melmac besteht das Alphabet aus den drei Vokalen A, E und O sowie den 7 Konsonanten G, D, P, R, L, N, F.

$\boxed{\text{A}}$ Wieviele Wörter der Länge 10 sind möglich, wenn jedes Wort mindestens einen Vokal enthalten soll?

$\boxed{\text{B}}$ Wieviele Wörter der Länge 11 sind möglich, wenn jedes Wort mindestens einen Vokal enthalten soll?

(2P.)

Übung 85. Unter den Voraussetzungen von Beispiel 84,

$\boxed{\text{A}}$ Wieviele Wörter der Länge 12 enthalten alle drei Vokale mindestens einmal?

$\boxed{\text{B}}$ Wieviele Wörter der Länge 13 enthalten alle drei Vokale mindestens einmal?

(3P.)

Übung 86.

$\boxed{\text{A}}$ Wieviele ungerade Zahlen zwischen 1000 und 9999 haben lauter verschiedene Ziffern?

$\boxed{\text{B}}$ Wieviele gerade Zahlen zwischen 1000 und 9999 haben lauter verschiedene Ziffern?

(3P.)

Übung 87. Berechnen Sie

$$\boxed{\text{A}} \quad (x-1)^8 \qquad\qquad \boxed{\text{B}} \quad (1-x)^7.$$

(2P.)

Übung 88. Zeigen Sie, daß für eine Primzahl p und $1 \leq k \leq p-1$ gilt

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$$

Folgerung:

$$(1+x)^p \equiv 1 + x^p \mod p$$

(5P.)

Übung 89. Es sei ein Strichcode gegeben (wie z.B. im Supermarkt), der aus Folgen von n Nullen und Einsen besteht. Dabei wird jedes Wort mit dem umgekehrten Wort als gleich angesehen; für $n = 5$ werden zum Beispiel die Codewörter 01011 und 11010 als gleich angesehen. Wieviele verschiedene Codewörter der Länge n gibt es?

(4P.)

Übung 90. Auf einer Party mit n Personen wird mit Sekt angestoßen. Wie oft klingen die Gläser, wenn jeder mit jedem genau einmal anstößt?

(2P.)

Übung 91. Wieviele Lösungen $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \in \{+1, -1\}^{2n}$ hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} = 0?$$

(2P.)

Übung 92. Auf wieviele Arten kann man

$\boxed{\text{A}}$ aus 33 Fußballspielern drei Mannschaften

$\boxed{\text{B}}$ aus 44 Fußballspielern vier Mannschaften

zu je 11 Mann zusammenstellen?

(3P.)

Übung 93. Zeigen Sie mit kombinatorischen Argumenten, daß

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{k+j}\binom{k+j}{k} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$$

(4P.)

Übung 94. Wieviele Ausgangsverteilungen gibt es für das Kartenspiel "Schnapsen"? Dabei bekommen zwei Spieler aus einem Paket von 20 Karten je 5 Karten, der Rest geht in einen Talon (bei letzterem ist die Reihenfolge wichtig!).

(2P.)

Übung 95. Auf wieviele Arten kann man

$\boxed{\text{A}}$ 15 ununterscheidbare Steckdosen auf 5 (unterscheidbare) Räume verteilen, sodaß

$\boxed{\text{B}}$ 16 ununterscheidbare Steckdosen auf 5 (unterscheidbare) Räume verteilen, sodaß

(a) in jeden Raum mindestens eine Steckdose kommt.
(b) ohne Einschränkung.
(c) in jeden Raum mindestens zwei Steckdosen kommen.

(2+2+2 P.)

Übung 96. Professor X hält seit 16 Semestern die gleiche Vorlesung.

$\boxed{\text{A}}$ In jedem Semester erzählt er 3 Witze, aber niemals die gleichen 3 Witze

$\boxed{\text{B}}$ In jedem Semester erzählt er 4 Witze, aber niemals die gleichen 4 Witze

(Reihenfolge spielt keine Rolle). Wieviele Witze muß er mindestens kennen?

(2 P.)

Übung 97. Zeigen Sie mit kombinatorischen Argumenten die Multinomialentwicklung

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=k} \binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

(3P.)

Übung 98. Auf wieviele Arten kann man n Buchstaben "A" und k Buchstaben "Z" so zu einem Wort anordnen, daß kein ZZ vorkommt?

(2 P.)

Übung 99. Wieviele 5-stellige Telephonnummern enthalten mindestens eine Ziffer, die mehrmals vorkommt?

(2P.)

Übung 100. Wieviele verschiedene Zahlenkombinationen kann man durch Werfen von 4 ununterscheidbaren Würfeln erzielen?

(2P.)

Übung 101. Wieviele ganzzahlige Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

unter der Voraussetzung

(a) $x_j > 0$
(b) $x_j \geq 0$

Wie hängen die Lösungen zusammen?

(2+2P.)

Übung 102. Herr Österreicher macht auf Mallorca Urlaub und geht in ein Postkartengeschäft. Es gibt Postkarten mit 30 verschiedenen Motiven. Wieviele Möglichkeiten hat Herr Österreicher, seine 23 Onkel und Tanten mit Postkarten zu beglücken, wenn jede(r)

(a) genau eine Postkarte bekommen soll?
(b) eine andere Postkarte bekommen soll?
(c) zwei verschiedene Postkarten bekommen soll?

(je 1P.)

Übung 103. Ein König wird auf die linke untere Ecke eines Schachbretts gestellt und soll in die rechte obere Ecke marschieren. Wieviele mögliche Wege gibt es, wenn er in jedem Schritt nur jeweils um ein Feld gerade nach rechts oder nach oben gehen darf?

(2P.)

Übung 104. An einer Fußballmeisterschaft nehmen N Mannschaften teil, von denen je zwei Mannschaften höchstens einmal gegeneinander spielen. Zeigen Sie mithilfe des Taubenschlagprinzips, daß es zu jedem Zeitpunkt mindestens zwei Mannschaften gibt, die genau die gleiche Anzahl von Spielen absolviert haben.

(3 P.)

Übung 105.
- $\boxed{\text{A}}$ Auf wieviele Arten kann man 13 Bälle in 27 Urnen verteilen, sodaß in jeder Urne höchstens 1 Ball zu liegen kommt,
- $\boxed{\text{B}}$ Auf wieviele Arten kann man 16 Bälle in 21 Urnen verteilen, sodaß in jeder Urne höchstens 1 Ball zu liegen kommt,

wenn

(a) die Bälle unterscheidbar sind?
(b) die Bälle ununterscheidbar sind?

(2+2P.)

Übung 106. Eine Gruppe von 30 Telematik-Studentinnen und Studenten, davon 4 Vegetarier, geht in die Mensa. Es gibt 3 verschiedene (fleischlose) Suppen, 5 Hauptgerichte, davon 2 vegetarisch, sowie 7 verschiedene süße Nachspeisen.

(a) Auf wieviele Arten können die 30 Personen jeweils ein Menü, bestehend aus Suppe, Hauptspeise und Nachspeise, zusammenstellen? (Vegetarier beachten!)
(b) Auf wieviele Arten können die 30 Personen jeweils ein Menü, bestehend aus Suppe, Hauptspeise und Nachspeise, zusammenstellen, wenn jede eine andere Speisenkombination bekommen soll? (Vegetarier beachten!)

Übung 107. Die Studentinnen und Studenten aus Aufgabe 3 nehmen an 5 Tischen zu je 6 Personen Platz.

(a) Auf wieviele Arten ist dies möglich (Sitzreihenfolge unwichtig)?
(b) Auf wieviele Arten können sie sich hinsetzen, wenn die Sitzreihenfolge berücksichtigt wird?
(c) Auf wieviele Arten können sie sich hinsetzen, wenn die 6 Studentinnen unter ihnen an einem Tisch sitzen wollen (Sitzreihenfolge unwichtig)?
(d) Auf wieviele Arten können sie sich hinsetzen, wenn die 6 Studentinnen unter ihnen an einem Tisch sitzen wollen und die Sitzreihenfolge berücksichtigt wird?

Übung 108. (a) Auf wieviele Arten kann man die Buchstaben des Wortes *MISSISSIPPI* anordnen?
(b) Auf wieviele Arten kann man die Buchstaben des Wortes *MISSISSIPPI* so anordnen, daß nicht alle I's, S und P's jeweils hintereinander stehen?

(1+3P.)

Übung 109. Eine Umfrage unter Studierenden an der TU hat die folgenden Anmeldungszahlen ergeben:

$\boxed{\text{A}}$
(a) 62 für Analysis
(b) 71 für Algebra
(c) 67 für Diskrete Mathematik
(d) 37 für Analysis und Algebra
(e) 32 für Analysis und Diskrete Mathematik
(f) 40 für Algebra und Diskrete Mathematik
(g) 12 für alle drei Fächer
(h) 44 für keines der drei Fächer

$\boxed{\text{B}}$
(a) 53 für Analysis
(b) 59 für Algebra
(c) 65 für Diskrete Mathematik
(d) 21 für Analysis und Algebra
(e) 17 für Analysis und Diskrete Mathematik
(f) 25 für Algebra und Diskrete Mathematik
(g) 10 für alle drei Fächer
(h) 30 für keines der drei Fächer

Beantworten Sie folgende Fragen:

(i) Wieviele waren für Analysis und Algebra angemeldet, aber nicht für diskrete Mathematik?
(ii) Wieviele waren für genau eines der drei Fächer angemeldet?
(iii) Wieviele Studierende wurden befragt?

(4P.)

Übung 110. Seien $A, B, C \subseteq X$ endliche Mengen und bezeichne $\bar{B} = X \setminus B$. Leiten Sie die Formel

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B \cap C| + \left|\bar{B} \cap C\right| - |A \cap B \cap C| - \left|A \cap \bar{B} \cap C\right|$$

her.

Übung 111. Auf wieviele Arten kann man 10 rote und 10 blaue Luftballons auf 3 Kinder verteilen, und zwar

(a) ohne Einschränkung
(b) so, daß jedes Kind mindestens einen roten Luftballon bekommt.
(c) so, daß jedes Kind mindestens einen Luftballon bekommt.

(4P.)

Übung 112. Eine Zahl zwischen 2 und 100 ist prim, genau dann wenn $k < 10$ und prim ist oder wenn k von keiner Primzahl $p < 10$ geteilt wird. Finden Sie die Anzahl der Primzahlen < 100 mithilfe des Inklusions-Exklusionsprinzips.

(4P.)

Übung 113.
$\boxed{\text{A}}$ Wieviele Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 1500\}$ sind durch 2, aber nicht durch 3 und 5 teilbar?
$\boxed{\text{B}}$ Wieviele Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 1500\}$ sind durch 3, aber nicht durch 2 und 5 teilbar?

(3 P.)

Übung 114. Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Permutationen der Buchstaben $aabbxxxxxx$ in denen die a's und die b's jeweils getrennt sind: Erlaubt sind z.B. Wörter der Gestalt $ababxxxxxx$, nicht aber $bxbxaaxxxx$.

(2 P.)

Übung 115. Zeigen Sie durch Koeffizientenvergleich für beliebiges $\alpha \neq 0$

$$\frac{d}{dx}(1+x)^\alpha = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

(2P.)

Übung 116. Bestimmen Sie durch Partialbruchzerlegung die Reihenentwicklung der Funktion

$$\boxed{\text{A}} \quad \frac{1+x}{1+x-2\,x^2} \qquad\qquad \boxed{\text{B}} \quad \frac{x}{1+x-6\,x^2}$$

(3P.)

Übung 117. Gegeben sie die Zahlenfolge $a_n = n \cdot 2^n + 3^n$. Finden Sie geschlossene Ausdrücke für die erzeugenden Potenzreihen

$$(a) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad\qquad (b) \qquad E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n;$$

Letztere bezeichnet man als *exponentielle erzeugende Potenzreihe.*

(2+2P.)

Übung 118. Finden Sie die erzeugende Funktion $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$ der *harmonischen Zahlen*

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Hinweis: (C.4.26)

(4P.)

Übung 119. Berechnen Sie für alle n

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Hinweis: Betrachten Sie

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\right)$$

und (C.4.26).

(4 P.)

Übung 120. Auf wieviele Arten kann man 25 Cent mit 7 Münzen bezahlen?
Hinweis: Beispiel (C.4.24) mit der Bewertung $k \to x^k \cdot y$.

(4 P.)

Übung 121. Bestimmen Sie mittels erzeugender Funktionen
$\boxed{\text{A}}$ die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von 7 Kugeln aus einer Urne mit 6 weißen, 6 roten und 6 schwarzen Kugeln, wobei nur eine gerade Zahl weißer, eine ungerade Zahl schwarzer, und eine durch 3 teilbare Zahl roter Kugeln entnommen werden darf.
$\boxed{\text{B}}$ die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von 8 Kugeln aus einer Urne mit 7 weißen, 6 roten und 7 schwarzen Kugeln, wobei nur eine ungerade Zahl weißer, eine gerade Zahl schwarzer, und eine durch 3 teilbare Zahl roter Kugeln entnommen werden darf.

(4P.)

Übung 122. Gegeben seien $2n$ Kugeln, wovon n Kugeln weiß sind und die restlichen lauter verschiedene bunte Farben haben. Gesucht ist die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von n Kugeln unter Verwendung erzeugender Funktionen.

(4P.)

Übung 123. Zeige, daß

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Hinweis: Vergleiche die Reihenentwicklungen von $(1+x)^{2n}$ und $(1+x)^n(1+x)^n$.

(2P.)

Übung 124. Lösen Sie die Rekursionsgleichungen

$\boxed{\text{A}}$	$a_{n+2} - a_{n+1} - 3a_n = 2^n, \quad n \geq 0$	$a_0 = 1$	$a_1 = 2$
$\boxed{\text{B}}$	$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = (n+1)2^n, \quad n \geq 0$	$a_0 = 1$	$a_1 = 1$

(3+3P.)

Übung 125. Finden Sie die erzeugende Funktion $F_k(x) = \sum_m a_{km} x^m$ für die Anzahl a_{km} der Möglichkeiten, mit k Würfeln die Summe m zu würfeln.

(3P.)

Übung 126. Berechnen Sie die exponentielle erzeugende Potenzreihe $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$ der Folgen b_n, die gegeben sind durch die Rekursionen

(a) $b_0 = 1$ $\qquad b_n = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} \quad n \geq 0$

(b) $b_0 = 1$ $\qquad b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} \quad n \geq 0$

(4+4P.)

E. Graphen und Bäume.

Übung 127. Zeichnen Sie den "Nachbarschaftsgraphen" der europäischen Union, bestimmen Sie die Kanten- und Knotenmenge und färben Sie ihn mit möglichst wenigen Farben.

(3P.)

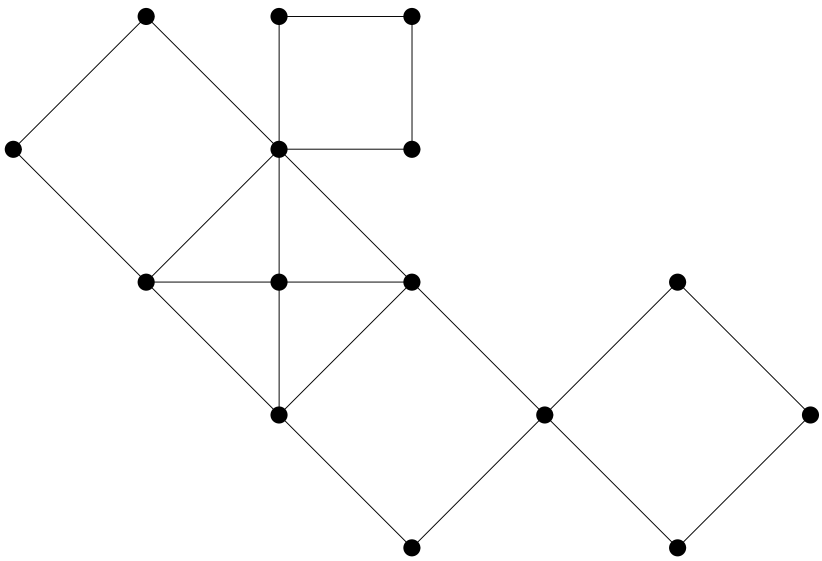
Übung 128. Zeigen Sie, daß in einem ungerichteten Graphen G die Relation

$$x\,R\,y \iff \exists \text{ Weg von } x \text{ nach } y$$

eine Äquivalenzrelation ist. Gilt dies auch, wenn man "Weg" durch "Pfad" ersetzt?

(3P.)

Übung 129. Gegeben sei der Graph



Finden Sie, wenn möglich, einen Eulerschen Kreis bzw. Weg mithilfe des Algorithmus von Fleury.

(2P.)

Übung 130. Ein Dominospiel besteht aus Spielsteinen mit allen möglichen (ungeordneten) Kombinationen von zwei Symbolen aus einer gegebenen Symbolmenge. Ist es möglich, alle Dominosteine gemäß den Dominoregeln in einem Kreis anzuordnen, wenn

(a) Die Symbole □, ⚀, ⚁, . . . , ⚅ erlaubt sind?

(b) Die Symbole ⚀, ⚁, . . . , ⚅ erlaubt sind?

(4P.)

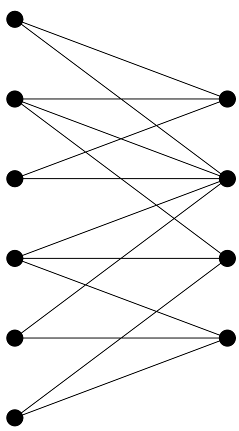
Übung 131. In einer gemischten Schulklasse gibt es 20 Burschen. Jeder der Burschen kennt 5 Mädchen und jedes der Mädchen kennt 4 Burschen. Wieviele Mädchen gibt es in der Klasse?

(2P.)

Übung 132. Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und Kanten $E = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [3, 4], [3, 5], [3, 6], [4, 5], [4, 6], [5, 6]\}$. Zeichne diesen Graphen und stelle fest, ob er planar ist.

(2P.)

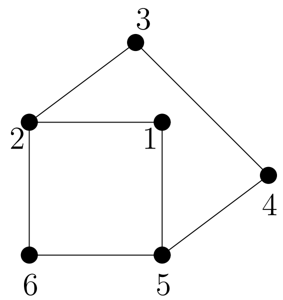
Übung 133. Zeigen Sie, daß der Graph



keinen Hamiltonschen Kreis besitzt.

(3P.)

Übung 134. Gegeben sei der Graph



Erstellen Sie die Adjazenzmatrix und finden Sie die Anzahl der Wege der Länge 5 von Knoten 2 nach Knoten 2.

(4P.)

Übung 135. Bestimmen Sie

(a) die Funktion $w_{1,1}(z)$ und

(b) die Anzahl der geschlossenen Wege der Länge k mit Ausgangsknoten 1.

für die folgenden (Di-)Graphen

(i) ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten,
$V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{[1, 2]\,,\ [1, 3]\,,\ [2, 3]\}$

(ii) gerichteter Graph ohne Mehrfachkanten,
$V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{[1 \to 2]\,,\ [2 \to 1]\,,\ [2 \to 3]\,,\ [3 \to 1]\,,\ [1 \to 3]\}$.

(Es ist empfehlenswert, am Ende der Rechnungen die Probe für $k = 0, 1, 2$ zu machen !)

(4+4P.)