KAPITEL U

Übungen

Inhaltsangabe

A. Zahlen und Kongruenzen

ÜBUNG 1. Der Divisionssatz besagt, daß es für jedes Zahlenpaar $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ gibt, sodaß $n = qm + r$.

Verfasse einen Algorithmus, der nur unter Verwendung der Operationen $+$ (Addition) und $-$ (Subtraktion) bei Eingabe von m und n die Zahlen q und r findet.

NB: Der Algorithmus ist anhand eines Beispiels an der Tafel durchzuexerzieren.

(2 P.)

ÜBUNG 2. Zeige durch Induktion: Für jedes n ist die Zahl $n(n+1)(n+2)$ durch 6 teilbar.

ÜBUNG 3. Zeige durch Induktion (unter Verwendung des vorhergehenden Resultats): Für jedes n ist die Zahl $a^{2n+1} - a$ durch 6 teilbar.

ÜBUNG 4. Finde mithilfe des euklidischen Algorithmus für jedes der folgenden Zahlenpaare (m, n) den größten gemeinsamen Teiler d und Zahlen a und b, sodaß $am + bn = d$.

(a)	$(233, 89)$	(b)	$(231, 142)$
(c)	$(377, 144)$	(d)	$(228, 141)$

(je 2 P.)

ÜBUNG 5. Schreibe den euklidischen Algorithmus zur Berechnung des $\mathrm{ggT}(m, n)$ detailliert als “Programm” nieder.

NB: Das Programm ist anhand eines Beispiels an der Tafel durchzuexerzieren.

(3 P.)

ÜBUNG 6. Zeige, daß mit der Primfaktorzerlegung $n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_n(p)}$ gilt

$$\mathrm{ggT}(m, n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\nu_m(p), \nu_n(p))} .$$

Überprüfe dies anhand der Beispiele aus Übung 4.

(3 P.)

ÜBUNG 7. Ergänze den euklidischen Algorithmus aus Übung 5 so, daß dabei auch die Zahlen a und b aus Satz (2.6) bestimmt werden.

NB: Das Programm ist anhand eines Beispiels an der Tafel durchzuexerzieren.

(3 P.)

ÜBUNG 8. Die Europäische Zentralbank beschließt im Jahr 2037, nur noch Scheine mit den Werten 130€ und 237€ zuzulassen. Wie kann man dann eine Stecknadel zum Preis von einem Euro bezahlen?

(2 P.)

ÜBUNG 9. Seien m und n ganze Zahlen. Zeige: wenn ganze Zahlen a und b existieren mit $am + bn = 1$, dann ist $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

(3 P.)

Übung 10. Zeige (unter Zuhilfenahme des vorhergehenden Beispiels): wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = d$, dann ist $\mathrm{ggT}(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$.

(3 P.)

Übung 11. Sei F_n die Folge der Fibonacci-Zahlen, gegeben durch die Rekursion

$$F_0 = F_1 = 1 \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Zeige, daß $\mathrm{ggT}(F_n, F_{n+1}) = 1$ für jedes n (Induktion).

(2P.)

Übung 12. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sodaß $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Zeige, daß $\mathrm{ggT}(m+n, m-n) = 1$ oder 2.

(2 P.)

Übung 13. Das *kleinste gemeinsame Vielfache* zweier natürlicher Zahlen m und n ist die Zahl definiert durch

$$\mathrm{kgV}(m, n) = \min\{\, \ell \in \mathbb{N} : m \mid \ell \text{ und } n \mid \ell \,\}\,.$$

Zeige, daß

$$\mathrm{kgV}(m, n) \cdot \mathrm{ggT}(m, n) = m \cdot n$$

(4 P.)

Übung 14. Warum genügt es, nur bis $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ zu gehen, um festzustellen, ob eine Zahl n eine Primzahl ist?

(1 P.)

Übung 15. Verfasse einen möglichst ökonomischen Algorithmus, der für gegebenes n alle Primzahlen $p \leq n$ bestimmt.

Hinweis: Gehe rekursiv vor. Wenn alle Primzahlen $\leq n - 1$ bestimmt sind, überprüfe, ob auch n Primzahl ist und füge gegebenenfalls n zur Liste hinzu.

NB: Das Programm ist anhand eines Beispiels an der Tafel durchzuexerzieren.

(3 P.)

Übung 16. Zeige mittels vollständiger Induktion, daß jede natürliche Zahl (außer 1) durch wenigstens eine Primzahl teilbar ist.

(4 P.)

Übung 17. Beweise den folgenden Satz von Euklid (Buch IX, Prop. 20): *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Hinweis: Widerspruchsbeweis. Finde zu jeder gegebenen endlichen Menge von Primzahlen $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ eine neue Zahl, die durch keine der p_i teilbar ist.

(3 P.)

Übung 18. Zeige: Wenn $k \geq 6$ und sowohl $k - 1$ als auch $k + 1$ Primzahlen sind, dann ist k durch 6 teilbar.

(2P.)

Übung 19. Verfasse einen Algorithmus, der bei Vorliegen aller Primzahlen $\leq n$ die Primfaktoren-Zerlegung von $n \in \mathbb{N}$ bestimmt.

NB: Der Algorithmus ist anhand eines Beispiels an der Tafel durchzuexerzieren.

(3 P.)

Die in den Aufgaben 20–33 angegebenen Relationen sind auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität zu untersuchen. Stelle auch fest, ob jeweils eine Äquivalenzrelation oder Halbordnungsrelation vorliegt.

Übung 20. Sei X die Menge der Österreicherinnen und Österreicher mit der Relation

$$x \,\mathrm{R}\, y \iff x \text{ ist mit } y \text{ verheiratet.}$$

(1 P.)

Übung 21. Menge $X =$ Erdbevölkerung, Relation

$$x \,\mathrm{R}\, y \iff x \text{ und } y \text{ haben den gleichen Geburtsort.}$$

(1 P.)

Übung 22. Menge $X = \mathbb{R}$, Relation $x \,\mathrm{R}\, y \iff x \leq y$.

(1 P.)

Übung 23. Menge $X = \mathbb{Z}$, Relation $x \,\mathrm{R}\, y \iff x \equiv y \ (m)$.

(1 P.)

Übung 24. Menge $X = \mathbb{C}$, Relation $z_1 \,\mathrm{R}\, z_2 \iff \operatorname{Re} z_1 \leq \operatorname{Re} z_2$.

(1 P.)

Übung 25. Menge $X = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n > 0 \ \forall\, n \}$, Relation

$$(a_n) \,\mathrm{R}\, (b_n) \iff \lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$$

(3 P.)

Übung 26. Menge X beliebig, Gleichheitsrelation $x = y$.

(1 P.)

Übung 27. Menge X beliebig, Ungleichheitsrelation $x \neq y$.

(1 P.)

Übung 28. $X = \mathbb{N}$, $m \,\mathrm{R}\, n \iff m \,\big|\, n$

(1 P.)

Übung 29. $X = \mathbb{N}$, $m \,\mathrm{R}\, n \iff m - n = 7$

(1 P.)

ÜBUNG 30. $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$, $(m,n)\,\mathrm{R}\,(p,q) \iff mq = np$

(2 P.)

ÜBUNG 31. $X = \mathbb{N}$, $m\,\mathrm{R}\,n \iff \mathrm{ggT}(m,n) = 16$

(1 P.)

ÜBUNG 32. $X = \mathbb{R}$, $x\,\mathrm{R}\,y \iff x \cdot y \geq 0$

(2 P.)

ÜBUNG 33. $X = \mathbb{R}$, $x\,\mathrm{R}\,y \iff x \cdot y > 0$

(2 P.)

ÜBUNG 34. Gib Beispiele von (Halb)ordnungsrelationen an.

(1 P./Beispiel)

ÜBUNG 35. Untersuche die folgenden Relationen auf der Menge $X = \mathbb{N}$ auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität.

NB: Gib jeweils eine Begründung für die Antwort an.

(a) $mRn \iff 2|(m \cdot n)$
(b) $mRn \iff 2|(m + n)$

ÜBUNG 36. Erstelle die Multiplikationstafel für

(a) $\mathbb{Z}_5$
(b) $\mathbb{Z}_6$.

(1+1 P.)

ÜBUNG 37. Für welche $m \in \mathbb{N}$ ist $31 \equiv 1 \mod m$?

(2P.)

ÜBUNG 38. Zeige, daß die Zahlen a, $2a, \ldots,$ $(p-1)a$ alle verschiedene Reste modulo p haben, wenn p eine Primzahl und $a \not\equiv 0 \mod p$ ist.

(3 P.)

ÜBUNG 39. Zeige die *Elferprobe*: Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, d.h., mit der Ziffernentwicklung

$$n = \sum a_i 10^i$$

ist n durch 11 teilbar genau dann, wenn

$$\sum a_i (-1)^i$$

durch 11 teilbar ist.

(2P.)

Übung 40. Für die *Internationale Standardbuchnummer* gibt es zwei Standards.

(1) Die alte ISBN-10 hat 10 Ziffern,

$$x_1x_2x_3\cdots x_{10},$$

wobei $x_1, x_2, \ldots, x_9 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und $x_{10} \in \{0, 1, \ldots, 9\} \cup \{X\}$ wobei das Symbol X für den Wert 10 steht und die letzte Ziffer x_{10} eine Prüfziffer ist, sodaß

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 9x_9 + 10x_{10} \equiv 0 \mod 11$$

Beispiel: 3540257829

(2) Die neue ISBN-13 hat 13 Ziffern,

$$z_1z_2z_3\text{-}z_4\cdots z_{13},$$

wobei $z_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und der Präfix $z_1z_2z_3$ entweder 978 oder 979 ist und die letzte Ziffer z_{13} eine Prüfziffer ist, die so gewählt wird, daß

$$z_1 + 3z_2 + z_3 + 3z_4 + \cdots z_{11} + 3z_{12} + z_{13} \equiv 0 \mod 10$$

(gerade Stellen mit 3 multiplizieren) z.B. entspricht die obige ISBN-10 im neuen Standard der Nummer 978-3540257820.

(a) Berechne die Prüfziffern der folgenden unvollständigen ISBN

978-3-540-97855

344215842

(b) Erkläre, warum auch die Regel

$$10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + \cdots + 2x_9 + x_{10} \equiv 0 \mod 11$$

für die Überprüfung einer ISBN-10 verwendet werden kann.

(3+2 P.)

Übung 41. Eine österreichische IBAN (*international bank account number*) hat immer zwanzig Stellen und sieht folgendermaßen aus:

ATpp bbbb bkkk kkkk kkkk

wobei *bbbbb* die fünfstellige Bankleitzahl, *kkk kkkk kkkk* die (um Nullen ergänzte) herkömmliche Kontonummer ist und *pp* ein Prüfcode zwischen 02 und 98, der so bestimmt wird, daß

$$bbbbbkkkkkkkkkkk1029pp \equiv 1 \mod 97$$

(1029 entsteht aus AT durch addieren von 9 zur Stelle im Alphabet: also $A \to 1+9 = 10$, $B \to 2+9 = 11$, …, $Z \to 26+9 = 35$).

Bestimme die IBAN der folgenden Kontonummer[1]: BLZ: 12345, KtoNr: 7654321

(3+2 P.)

Übung 42. *Dividieren in* $\mathbb{Z}_n$. Die Inverse $[m]^{-1}$ einer ganzen Zahl m in $\mathbb{Z}_n$ (geschrieben $m^{-1} \mod n$) ist die Restklasse $[x]$ einer ganze Zahl x, für die gilt, daß $[x]_n \cdot [m]_n = [1]_n$. Mit anderen Worten, man muß zwei Zahlen x und y finden, sodaß $x \cdot m + y \cdot n = 1$. Zeige, daß das genau dann möglich ist, wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

(4 P.)

[1]Bitte kein Geld überweisen, es ist nicht das Konto des Vortragenden und verbessert nicht die Note.

(3+2 P.)

ÜBUNG 43. Finde, wenn möglich, die Inversen von (a) $5 \mod 173$ sowie (b) $14 \mod 93$, von (c) $5 \mod 175$ sowie (d) $15 \mod 93$

(je 1 P.)

ÜBUNG 44. Bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der Gleichung

(a) $$6x \equiv 3 \mod 9$$

(b) $$6x \equiv 4 \mod 9$$

(c) $$4x + 3 \equiv 1 \mod 7$$

(d) $$4x + 5 \equiv 2 \mod 9$$

(je 2P.)

ÜBUNG 45. Löse, wenn möglich, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2\,y &= 4 \\ 4x + 3\,y &= 3 \end{aligned}$$

(a) in $\mathbb{Z}_5$ (b) in $\mathbb{Z}_7$

(3P.)

ÜBUNG 46. Löse das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + 5y &= 9 \\ 3x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

in $\mathbb{Z}_{11}$. Gibt es auch eine Lösung in $\mathbb{Z}_{13}$?

(3P.)

ÜBUNG 47. Bestimme alle ganzzahligen Lösungen der diophantischen Gleichung

$$45\,x - 75\,y = 30$$

(2P.)

ÜBUNG 48. Löse die folgenden simultanen Kongruenzen mithilfe des chinesischen Restsatzes (vgl. Skriptum (A.1.12), (A.3.13) und (A.3.14)).

$$\begin{array}{lllll} (a) & x \equiv 1 \mod 11 & x \equiv 6 \mod 18 & x \equiv 5 \mod 7 \\ (b) & x \equiv 3 \mod 9 & x \equiv 1 \mod 5 & x \equiv 5 \mod 8 \end{array}$$

(je 2 P.)

ÜBUNG 49. Löse die folgenden simultanen Kongruenzen mithilfe des chinesischen Restsatzes

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 5 \\ x &\equiv 2 \mod 7 \\ x &\equiv 3 \mod 8 \\ x &\equiv 4 \mod 9 \end{aligned}$$

(3 P.)

ÜBUNG 50. Hat das folgende Gleichungssystem eine Lösung? Wenn ja, dann bestimme diese.

$$(a) \quad \begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 2 \mod 9 \\ x &\equiv 1 \mod 10 \end{aligned} \qquad\qquad (b) \quad \begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 5 \\ x &\equiv 3 \mod 9 \\ x &\equiv 2 \mod 10 \end{aligned}$$

(3 P.)

ÜBUNG 51. Zeige, daß die folgende Aussage richtig ist:

$$a \equiv b\ (m_1) \text{ und } a \equiv b\ (m_2) \implies a \equiv b\ (m) \quad \text{für} \quad m = \operatorname{kgV}(m_1, m_2)\,.$$

Ist insbesondere $\operatorname{ggT}(m_1, m_2) = 1$, dann gilt also $a \equiv b\ (m_1 m_2)$.

(4 P.)

ÜBUNG 52. Seien a, $b \in \mathbb{N}$. Zeige: Wenn $100a + b$ durch 7 teilbar ist, dann ist auch $a + 4b$ durch 7 teilbar.

Hinweis: modulo 7 rechnen.

ÜBUNG 53. Löse die Gleichung

$$3\,x^2 + 2\,x + 1 = 0$$

in $\mathbb{Z}_{89}$.

(3P.)

ÜBUNG 54. Löse die Gleichung:

$$4x^2 + 5x + 3 = 0 \mod 69.$$

Hinweis: Zerlege $69 = 3 \cdot 23$ und löse zuerst die Gleichung in $\mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{Z}_{23}$. Bestimme dann mit dem Chinesischen Restsatz die Lösungen in $\mathbb{Z}_{69}$.

(4P.)

ÜBUNG 55. Löse die Gleichungen modulo 9973:

(a) $x^2 \equiv 1$
(b) $x^6 \equiv 1$
(c) $3x + 5 \equiv 1$

(3P.)

Übung 56. Welche der folgenden Strukturen $(X, \circ)$ bilden Halbgruppen, Monoide, Gruppen?

(a) Sei U eine Menge, und $X = \mathcal{P}(U)$ die *Potenzmenge*

$$X = \{A : A \subseteq U\}$$

ausgestattet mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \cap B$$

(b) X wie vorher mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \cup B$$

(c) X wie vorher mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(d) Sei U eine Menge und $X = U^U$ die Menge aller Funktionen von U nach U mit der Verknüpfung

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

(Hintereinanderausführung).

Achtung, die Antwort hängt davon ab, wie die Menge X aussieht!

(e) X beliebig mit der Verknüpfung

$$a \circ b = a$$

für alle $a, b \in X$.

(je 2P.)

Übung 57. Berechne (ohne Taschenrechner), mit Hilfe des Satzes von Euler-Fermat die Potenzen

$$(a) \quad 2^{32} \mod 11 \qquad\qquad (b) \quad 2^{(2^{32})} \mod 11\,.$$

Hinweis: $2^{m \cdot n} = (2^m)^n$.

(2+3 P.)

Übung 58. Berechne ohne Taschenrechner in $\mathbb{Z}_{50}$

$$[3]^{(2^{32})}$$

(2P.)

Übung 59. Berechne (ohne Taschenrechner) in $\mathbb{Z}_{60}$

$$[14]^{(2^{32})}$$

Hinweis: Der Satz von Euler-Fermat ist nicht sofort anwendbar (warum?). Man kann aber wie folgt vorgehen: Zerlege $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Bestimme $[14]^{(2^{32})} \mod 4$, $[14]^{(2^{32})} \mod 3$, $[14]^{(2^{32})} \mod 5$, und verwende den chinesischen Restsatz, um daraus $14^{(2^{32})} \mod 60$ zu bestimmen.

(3P.)

Übung 60. Versuche (durch Probieren), den in der folgenden Nachricht verwendeten Caesar-Schlüssel zu erraten und die Nachricht zu rekonstruieren:

WQVNPWANSWANPSEZWASE

(2P.)

Übung 61. Es ist bekannt, daß der Terrorist *O.* die Nachrichten an seinen Kumpanen *W.* mit einer 2×2 Matrix A verschlüsselt. Durch Zufall weiß man, daß die Botschaft

DU_BIST_EIN_HUMP

modulo $\mathbb{Z}_{29}$ in die Zahlenfolge

$$15, 26, 21, 6, 9, 10, 2, 18, 8, 17, 13, 1, 27, 18, 4, 22$$

transformiert wird. Bestimme die verwendete Matrix A.

(3P.)

Übung 62. Zu einem Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch (9.2) seien folgende Daten bekannt:

$$g = 3 \qquad p = 113$$
$$m = 54 \qquad n = 42$$

Bestimme wenn möglich die geheimen Parameter a, b und den Schlüssel r!

(3P.)

Übung 63. Sei $m = pq$ und $\operatorname{ggT}(r, \varphi(m)) = 1$. Satz A.(2.6) besagt, daß es ein $s \in \mathbb{Z}$ gibt sodaß $rs \equiv 1 \mod \varphi(m)$. Warum stimmt die Behauptung (nach A.(10.4)), daß $s \in \mathbb{N}$, d.h. $s > 0$, gewählt werden kann?

(2P.)

Übung 64. Die Zahlenfolge

$$(1966, 2119, 952)$$

wurde mit dem RSA-Algorithmus mit öffentlichem Schlüssel

$$(m = 2701, r = 1111)$$

verschlüsselt.

Finde den privaten Schlüssel s und entschlüssle die Nachricht (Die Buchstaben sind mit der Konvention von Beispiel A.(10.7) codiert).

Hinweis: Für einen Teil der Berechnungen ist wahrscheinlich ein Computer erforderlich.

(4P.)

Übung 65. Gegeben seien $m = 2491$ und $r = 957$ sowie die mit der Konvention von Beispiel A.(10.7) aus der Vorlesung verschlüsselte Zahlenfolge $(1137, 2221, 2014, 111)$. Finde den inversen Schlüssel s und entschlüssle die Botschaft.

Hinweis: Wahrscheinlich Computer erforderlich.

(4P.)

Übung 66. Sei n eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß $2^n - 1$ eine Primzahl ist. Zeige, daß auch n eine Primzahl sein muß.

Die Umkehrung gilt nicht: Finde die kleinste Primzahl p, sodaß $2^p - 1$ keine Primzahl ist.

Hinweise:

$$x^{pq} = (x^p)^q \qquad x^s - 1 = (x-1)(1 + x + \cdots + x^{s-1})$$

(2P.)

B. Grundlagen der Logik

Übung 67. Konstruiere Wahrheitstafeln für die folgenden Formeln:

(a) $((A \wedge B) \wedge (\neg B \vee C))$
(b) $(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$

(2P.)

Übung 68. Formalisiere die folgenden Aussagen und beantworte die untenstehende Frage:

(a) Jeder, der ein gutes Gehör hat, kann richtig singen.
(b) Jeder, der gut Klavier spielen kann, kann seine Zuhörerschaft begeistern.
(c) Niemand ist ein wahrhafter Musiker, wenn er nicht seine Zuhörerschaft begeistern kann.
(d) Jemand, der kein gutes Gehör hat, kann seine Zuhörerschaft nicht begeistern.
(e) Niemand, außer einem wahrhaften Musiker, kann eine Symphonie schreiben.

Welche Eigenschaften muß jemand notwendigerweise besitzen, um eine Symphonie zu schreiben?

(3P.)

Übung 69. Wir analysieren die möglichen Interpretationen der folgenden Aussage:

Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht oder nachgemachte oder verfälschte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird mit Freiheitsstrafe nicht unter zwei Jahren bestraft.

Zerlege und formalisiere die Aussage, und stelle fest, wie die Justiz in folgenden Fällen vorgehen wird.

(a) Uwe hat sich nachgemachte Geldnoten verschafft, aber nicht in Verkehr gebracht. Was passiert mit ihm?
(b) Karlheinz hat Banknoten gedruckt, aber nur zur Dekoration seiner Bauernstube. Was passiert mit ihm?

Sind folgende Situationen denkbar? Wie kann man den Spruch modifizieren, damit Winkeladvokaten keine Chance haben?

(c) Silvio hat sich Blüten verschafft und in Verkehr gebracht, und wird nicht bestraft.
(d) Walter ist zu zwei Jahren Freiheitsstrafe verurteilt worden, obwohl er keine Banknoten nachgemacht hat.

(3P.)

Übung 70. Formalisiere die folgenden Schlüsse, stelle jeweils fest, ob sie korrekt sind und wenn ja, führe den formalen Beweis.

(a) Wenn Siegfried in der Stadt wohnt, darf er keinen Diesel fahren. Siegfried fährt einen Diesel, also wohnt er nicht in der Stadt.
(b) Wenn die Begleitmusik stimmt, dann läßt Uwe mit sich reden. Uwe läßt nicht mit sich reden, also stimmt die Begleitmusik nicht.
(c) Das Bruttosozialprodukt wird im kommenden Jahr nicht weiter anwachsen, oder der Export wird steigen. Das Bruttosozialprodukt wird aber weiter wachsen. Somit wird auch der Export weiter steigen.
(d) Wenn Josef größer ist als Werner, dann ist Frank kleiner als Arnold. Wenn Josef und Susi gleich groß sind, dann ist Josef größer Werner. Frank ist nicht kleiner als Arnold, daher sind Josef und Susi nicht gleich groß.
(e) Wenn der Vorsitzende männlich ist, dann ist der Schriftführer weiblich, wenn auch der Kassenwart männlich ist. Also: Wenn Kassenwart und Schriftführer männlich sind, dann ist der Vorsitzende weiblich.
(f) Die Österreicher sind politisch gut informiert, oder sie sitzen gerne vor dem Fernseher. Wenn ihnen die Reden der Minister gefallen, dann sind sie politisch gut informiert. Wenn ihnen die Reden der Minister nicht gefallen, dann sitzen sie nicht gerne vor dem Fernseher. Folglich sind sie politisch gut informiert.

(je 2P.)

Übung 71. Zeige mithilfe von Wahrheitstafeln:

(a) Sei A eine Tautologie, B eine beliebige Formel, dann gilt

$$A \vee B \Leftrightarrow A \qquad A \wedge B \Leftrightarrow B$$

(b) Sei B eine beliebige Formel, C unerfüllbar. Dann gilt:

$$B \vee C \Leftrightarrow B \qquad B \wedge C \Leftrightarrow C$$

(2P.)

Übung 72. In der Fuzzy-Logik werden nicht nur die Wahrheitswerte 0 und 1, sondern beliebige Werte im Intervall $[0, 1]$ zugelassen. Eine Belegung ist daher eine Funktion $\beta : \mathcal{V} \to [0, 1]$; die logischen Operationen sind wie folgt definiert:

$$\beta(\neg A) = 1 - \beta(A) \qquad \beta(A \wedge B) = \min(a, b) \qquad \beta(A \vee B) = \max(a, b)$$

Zeige, daß die Regeln von de Morgan

$$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B) \qquad \neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$$

auch für die Fuzzy-Logik gelten, d.h., das links und rechts jeweils das gleiche Ergebnis herauskommt.

(3P.)

Übung 73. Inspektor D befragt drei Verdächtige – A, B und C – für eine Tat. Er weiß, daß genau eine der drei Personen schuld ist und jede Person einmal lügt und einmal die Wahrheit sagt.

A sagt: Ich war es nicht. B hat es getan.
B sagt: Ich war es nicht. Ich weiß, daß C es getan hat.

C sagt: Ich war es nicht. B weiß nicht wer es war.

Wer hat es getan?

(3P.)

Übung 74. In einer Stadt sagen alle Politiker immer die Unwahrheit, während alle anderen immer die Wahrheit sagen. Ein Zugereister führt eine Befragung durch und erhält folgende Antworten.

A sagt: "B ist ein Politiker."
B sagt: "Wenn A sagt, er sei kein Politiker, dann lügt er."
C sagt: "A ist kein Politiker."

Kann man daraus schließen, wer Politiker ist und wer nicht? Wenn ja, wer?

(3P.)

Übung 75. **A**lice, **B**ob und **C**harles sind zu einer Geburtstagsfeier eingeladen. Wie das bei den Leuten so ist, haben alle Vorbehalte:

(a) Wenn Charles nicht kommt, dann kommt auch Bob nicht.
(b) Entweder Bob oder Charles kommt, aber nicht beide.
(c) Charles und Alice kommen, wenn sie kommen, nur zusammen.

Formalisiere die Aussagen und stelle fest, wer zur Feier kommt.

(2 P.)

Übung 76. Für die Erstellung es neuen Mensa Speiseplans gelten die folgenden Bedingungen:

(i) Zu jeder Mahlzeit muß es Brot geben, wenn kein Dessert gereicht wird.
(ii) Wird Brot und Dessert serviert, darf es dazu keine Suppe geben.
(iii) Wenn aber Suppe gereicht wird, oder kein Dessert gereicht wird, darf es auch kein Brot geben.

Formalisiere diese Bedingungen mittels Aussagenlogik, und finde eine möglichst einfache äquivalente Formel.

(3P.)

Übung 77. Formalisiere die folgenden Aussagen mittels Aussagenlogik:

- Von A, B und C gilt genau eines.
- Von A, B und C gelten genau zwei.
- Von A, B und C gilt mindestens eins.

Übung 78. Zeige folgende Äquivalenzen anhand von Wahrheitstafeln:

(a) $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
(b) $A \to B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
(c) $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

(2+2+2P.)

Übung 79. Seien P und Q aussagenlogische Formeln. Zeige

(a) $P \Rightarrow Q$ gilt genau dann, wenn $P \to Q$ eine Tautologie ist.
(b) $P \Leftrightarrow Q$ gilt genau dann, wenn $P \leftrightarrow Q$ eine Tautologie ist.

(2P.)

Übung 80. Gib eine dreielementige Menge von Formeln an, die unerfüllbar ist, während jede zweielementige Teilmenge erfüllbar ist.

(3P.)

Übung 81. Bestimme alle paarweise nicht-äquivalenten Aussageformen, die aus den Variablen A und B sowie dem Junktor $\to$ (Implikation) aufgebaut werden können.

(3P.)

Übung 82. Sind die folgenden logischen Aussageformen äquivalent?

(a) $(\neg A \to B) \to (B \vee C)$ und $(\neg B \to A) \to (\neg B \to C)$
(b) $(A \to B) \to C$ und $A \to (B \to C)$
(c) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$ und $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$

(je 2P.)

Übung 83. Beweise mit den Regeln des logischen Schließens den **Modus Tollens**

$$((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P.$$

(3P.)

Übung 84. Zeige mit den Regeln des logischen Schließens auf möglichst elegante Weise die Allgemeingültigkeit des Ausdrucks

(a) $B \to ((A \to (B \to A)) \to B)$
(b) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$

(3P.)

Übung 85. Beweise mit den Regeln des logischen Schließens die folgenden Subjunktionsgesetze:

(a) Tauschgesetz für Vorderglieder

$$A \to (B \to C) \Longleftrightarrow B \to (A \to C)$$

(b) Klammer-Änderungsgesetz für “$\to$”

$$A \to (B \to C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \to C$$

(3P.)

Übung 86. Was ist falsch am folgenden Induktionsbeweis der Aussage:

"Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: je n Punkte der Ebene liegen auf einer Geraden".

"*Beweis*".

Induktionsanfang:
Die Aussage gilt für $n = 1$ und $n = 2$.

Induktionsschritt:
Angenommen, die Aussage ist für n wahr. Seien $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ Punkte. Nach Induktionsvoraussetzung liegen die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ auf einer Geraden g und $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_{n+1}$ auf einer Geraden h. Da aber sowohl g als auch h durch die Punkte P_1 und P_2 verlaufen, gilt $g = h$ und $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ liegen auf einer Geraden.

(3P.)

Übung 87. Bringe die logische Aussageform

$$(A \vee B) \to C$$

auf

(a) konjunktive Normalform
(b) disjunktive Normalform

(je 2P.)

Übung 88. Bringe die Formel $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ auf

(a) Disjunktive Normalform
(b) Konjunktive Normalform

(2+2P.)

Übung 89. Bringe die Formel $A \to (B \leftrightarrow C)$ auf

(a) Disjunktive Normalform
(b) Konjunktive Normalform

(2+2P.)

Übung 90. Bestimme die Menge der Folgerungen, die aus der Prämissenmenge

$$\begin{aligned} P_1 &:\Longleftrightarrow A \to (B \to C) \\ P_2 &:\Longleftrightarrow A \vee ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C)) \\ P_3 &:\Longleftrightarrow B \to C \end{aligned}$$

gezogen werden können.

(3P.)

Übung 91. Zeige:

(a) $\mathcal{L}_{\{|\}}$ ist vollständig.
(b) $\mathcal{L}_{\{\neg,\to\}}$ ist vollständig.
(c) $\mathcal{L}_{\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}}$ ist nicht vollständig.
(d) $\mathcal{L}_{\{\neg\}}$ ist nicht vollständig.

Hinweis zu (c):

Zeige, daß $\neg A$ nicht darstellbar ist; dies ist äquivalent dazu, daß keine Kontradiktion in der Sprache enthalten ist: wenn $b(A_i) = W$, dann ist $\forall P \in \mathcal{L}\ \bar{b}(P) = W$.

(3+3+4+2P.)

ÜBUNG 92. Bestimme (duch Äquivalenzumformungen) eine KNF der logischen Aussageformel aus Beispiel **??** und leite eine möglichst kurze äquivalente Formulierung her.

(3P.)

ÜBUNG 93. Bestimme eine

(a) KNF (b) DNF

(nicht unbedingt n-KNF/DNF) der logischen Aussageformel

$$((A \to B) \wedge (C \leftrightarrow D)) \to (A \vee E)$$

(je 2P.)

ÜBUNG 94. Es seien die Funktionen $f_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ und für $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, |\}$ die jeweilige zweistellige Funktion $f_* : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ definiert wie die Wahrheitsfunktionen $F_\neg$, F_*, mit 0 statt F und 1 statt W.

(a) Drücke die folgenden Funktionen durch $f_\neg$ und $f_\wedge$ aus:

$$g_1(x,y) = x + y \qquad g_2(x,y) = x \cdot y$$
$$g_3(x) = x^2 + 1 \qquad g_4(x,y,z) = x \cdot y + z^3$$

Hier bedeuten $+$ und $\cdot$ Addition und Multiplikation modulo 2.

(je 1P.)

(b) Sei

$$f_\triangledown(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = y = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann läßt sich jede Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ durch $f_\triangledown$ ausdrücken.

(3P.)

(c) Drücke die Funktionen aus (a) durch $f_\triangledown$ aus.

(je 2P.)

(d) Zeige, daß die Funktion $f_\triangledown$ wie in (b) und $f_|$ definiert durch

$$f_|(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

die einzigen zweistelligen Funktionen sind, die (jede für sich allein) alle Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ erzeugen.

(6P.)

ÜBUNG 95. Zeige durch strukturelle Induktion, daß jede aussagenlogische Formel über einem beliebigen Alphabet $\mathcal{A}$ mit den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ mindestens soviele Variablensymbole wie Junktoren enthält.

(2P.)

ÜBUNG 96. Beweise den *Fregeschen Kettenschluß*

$$\models (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

mit Hilfe des Resolutionskalküls.

ÜBUNG 97. Professor Gromky prüft nach dem folgenden Schema:

(1) Wenn er am Samstag keine Prüfung abhält, dann am Freitag, aber nicht am Dienstag.
(2) Wenn am Dienstag keine Prüfung stattfindet, aber am Freitag schon, dann wird auch am Donnerstag geprüft.
(3) Wenn er am Donnerstag prüft und nicht am Montag, dann prüft er am Samstag.
(4) Wenn am Dienstag geprüft wird, dann ist Mittwoch frei.
(5) Wenn am Montag geprüft wird, dann ist Freitag frei.
(6) Wenn Samstags geprüft wird, dann auch am Freitag, aber nicht am Donnerstag.

Stelle mit Hilfe des Resolutionskalküls fest, an welchen Tagen geprüft wird.

(3P.)

ÜBUNG 98. Das *Dirichletprinzip* oder *Taubenschlagprinzip* besagt, daß es unmöglich ist, $n+1$ Tauben so auf n Taubenschläge zu verteilen, daß in jedem Taubenschlag höchstens eine Taube zu sitzen kommt.

Hinweis: Die logische Variable A_{ij} stehe für die Aussage *Taube Nr j sitzt im Taubenschlag Nr i*, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$. Dann kann man die Bedingungen wie folgt formulieren:

(1) In jedem Taubenschlag sitzt höchstens eine Taube:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n+1} (\neg A_{ij} \vee \neg A_{ik})$$

(2) Jede Taube sitzt in einem Taubenschlag:

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1} (A_{1j} \vee A_{2j} \vee \cdots \vee A_{nj})$$

Zeige mit dem Resolutionskalkül (DPLL), daß das Problem für $n = 2$ und $n = 3$ unlösbar ist.

(3P.)

ÜBUNG 99. Ein Rätsel (© A. Einstein).

Löse das folgende Rätsel (auf welche Art auch immer):

(1) Es stehen fünf Häuser in einer Reihe nebeneinander (von links nach rechts). Jedes Haus hat eine andere Farbe.
(2) In jedem Haus wohnt eine Person einer anderen Nationalität.

(3) Jede Person bevorzugt ein bestimmtes Getränk, spielt ein bestimmtes Musikinstrument und hält ein bestimmtes Haustier.
(4) Alle fünf Getränke, Musikinstrumente und Haustiere sind verschieden.

Außerdem sind folgende Tatsachen bekannt:

(1) Der Brite lebt im roten Haus.
(2) Der Schwede hält einen Hund.
(3) Der Däne trinkt gerne Tee.
(4) Das grüne Haus steht direkt links vom weißen Haus.
(5) Der Besitzer des grünen Hauses trinkt gerne Kaffee.
(6) Die Person, die Geige spielt, hält eine Vogel.
(7) Der Bewohner des mittleren Hauses trinkt gerne Milch.
(8) Im gelben Haus steht ein Klavier.
(9) Der Norweger wohnt im ersten Haus.
(10) Der Gitarrist wohnt neben dem, der eine Katze hält.
(11) Der Mann mit dem Pferd wohnt neben dem, der Klavier spielt.
(12) Der Flötenspieler trinkt gerne Bier.
(13) Neben dem blauen Haus wohnt der Norweger.
(14) Der Deutsche spielt Trompete.
(15) Der Gitarrist hat einen Nachbarn, der gerne Wasser trinkt.

Frage: Wem gehört der Fisch?

Übung 100. In Kakanien gibt es Politiker. Jeder Politiker ist entweder jung oder alt, und jeder Politiker ist entweder gesund oder krank. Jeder alte Politiker ist gierig und jeder gesunde Politiker ist gierig. Es gibt sowohl gierige als auch nicht gierige Politiker. Welche der folgenden Aussagen können aus diesen Daten geschlossen werden?

(a) Es gibt junge Politiker.
(b) Es gibt alte Politiker.
(c) Alle nicht gierigen Politiker sind jung.
(d) Einige junge Politiker sind krank.
(e) Alle jungen Politiker sind krank.

Übung 101. Drücke die Aussage

$$\forall x \exists y \forall z \, P(x, y, z)$$

unter alleiniger Verwendung des Existenzquantors $\exists$ und Negation aus.

(3P.)

Übung 102. Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Drücke folgende Aussagen in einer Sprache mit Quantoren aus:

(a) Die f entsprechende Funktion ist injektiv.
(b) Die f entsprechende Funktion ist surjektiv.
(c) Die f entsprechende Funktion ist konstant.

(1+1+1P.)

Übung 103. Drücke folgende Aussagen über natürliche Zahlen mit Quantoren und den folgenden Symbolen aus: Konstante 0, Funktionssymbole S (einstellig), $+$ (zweistellig), $\cdot$ (zweistellig), mit der üblichen Interpretation in $\mathbb{N}_0$. (S ist die "Nachfolgerfunktion" $S(n) = n + 1$).

(a) x ist gerade.
(b) x ist ein Teiler von y.
(c) x ist kongruent zu $y \mod z$
(d) x ist eine Potenz von 2. (Hinweis: welche Teiler hat x?).

(1+1+1+1P.)

Übung 104. Formalisiere die Aussage

Eine natürliche Zahl ist durch 6 teilbar genau dann, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.

(3P.)

Übung 105. Gegeben seien folgende Prädikate

V(x): x ist ein Vogel
D(x): x ist ein Drache
T(x): x ist ein Tier
f(x): x kann fliegen
s(x): x kann Feuer spucken
g(x): x ist glücklich
l(x,y): x wird von y geliebt

Drücke folgende Feststellungen in Prädikatenlogik bzw. Umgangssprache aus:

(a) $\forall x\,(T(x) \wedge f(x) \wedge \neg V(x)) \to D(x)$
(b) $\exists x\,\forall y\,((T(x) \wedge f(x) \wedge s(x) \wedge l(x,y)) \to D(y))$
(c) Alle Tiere, die fliegen können und keine Drachen sind, werden von einigen Vögeln geliebt.
(d) Jeder Vogel ist glücklich, wenn ein von ihm geliebtes fliegendes Tier kein Feuer spuckt.

(3P.)

Übung 106. Drücke die folgenden Aussagen unter Verwendung geeigneter ein- und zweistelliger Prädikate als prädikatenlogische Formeln aus:

(a) Kein Mensch ist unsterblich.
(b) Wenn zwei sich streiten, freut sich der Dritte.
(c) Alle Menschen sind sterblich, Sokrates ist ein Mensch, also ist Sokrates sterblich.

(3P.)

Übung 107. Bestimme die freien und gebundenen Variablen der Formel

$$(\forall z(Q(z) \wedge \forall x P(x,y))) \vee (\exists y P(x,y)).$$

(2P.)

Übung 108. Führe, wenn zulässig (Begründung!), folgende Substitutionen durch:

(a) $$\forall y(P(x,y) \vee \forall z \exists x(f(z,c) = f(c,x))) \quad \Big| \quad x/f(g(x),c)$$

(b) $$\exists x(P(g(x), f(x,y)) \vee Q(x)) \quad \Big| \quad x/c, y/f(c, g(x))$$

(c) $$P(x,y) \to \exists x(Q(f(x,z)) \vee \forall y(Q(f(x,y)))) \quad \Big| \quad y/g(x), z/g(y)$$

(je 2P.)

Übung 109. Bringe folgende Formel auf Pränex-Normalform

$$\forall x(\forall y \exists z(R(x,y,z)) \wedge \exists z \forall y \neg R(x,y,z))$$

(2P.)

C. Elementare Abzählmethoden

Übung 110. Auf einem Computersystem sind Dateinamen mit den Buchstaben *A–Z* (ohne Umlaute) und den Ziffern 0–9 erlaubt, wobei ein Dateiname nicht mit einer Ziffer beginnen und höchstens 11 Zeichen lang sein darf. Wieviele verschiedene Dateinamen gibt es?

(2P.)

Übung 111. Auf dem Planeten Melmac besteht das Alphabet aus den drei Vokalen A, E und O sowie den 7 Konsonanten G, D, P, R, L, N, F.

(a) Wieviele Wörter der Länge 10 sind möglich, wenn jedes Wort mindestens einen Vokal enthalten soll?
(b) Wieviele Wörter der Länge 11 sind möglich, wenn jedes Wort mindestens einen Vokal enthalten soll?

(2P.)

Übung 112. Unter den Voraussetzungen von Beispiel 111,

(a) Wieviele Wörter der Länge 12 enthalten alle drei Vokale mindestens einmal?
(b) Wieviele Wörter der Länge 13 enthalten alle drei Vokale mindestens einmal?

(3P.)

Übung 113.

(a) Wieviele ungerade Zahlen zwischen 1000 und 9999 haben lauter verschiedene Ziffern?
(b) Wieviele gerade Zahlen zwischen 1000 und 9999 haben lauter verschiedene Ziffern?

(3P.)

Übung 114. Berechne

$$(a) \quad (x-1)^8 \qquad\qquad (b) \quad (1-x)^7.$$

(2P.)

Übung 115. Zeige, daß für eine Primzahl p und $1 \leq k \leq p-1$ gilt

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$$

Folgerung:

$$(1+x)^p \equiv 1 + x^p \mod p$$

(5P.)

Übung 116. Es sei ein Strichcode gegeben (wie z.B. im Supermarkt), der aus Folgen von n Nullen und Einsen besteht. Dabei wird jedes Wort mit dem umgekehrten Wort als gleich angesehen; für $n = 5$ werden zum Beispiel die Codewörter 01011 und 11010 als gleich angesehen. Wieviele verschiedene Codewörter der Länge n gibt es?

(3P.)

Übung 117. Auf einer Party mit n Personen wird mit Sekt angestoßen. Wie oft klingen die Gläser, wenn jeder mit jedem genau einmal anstößt?

(2P.)

Übung 118. Wieviele Lösungen $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \in \{+1, -1\}^{2n}$ hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} = 0?$$

(2P.)

Übung 119. Auf wieviele Arten kann man

(a) aus 33 Fußballspielern drei Mannschaften
(b) aus 44 Fußballspielern vier Mannschaften

zu je 11 Mann zusammenstellen?

(3P.)

Übung 120. Zeige mit kombinatorischen Argumenten, daß

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{j} = \binom{n}{k+j}\binom{k+j}{k} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$$

(3P.)

Übung 121. Wieviele Ausgangsverteilungen gibt es für das Kartenspiel "Schnapsen"? Dabei bekommen zwei Spieler aus einem Paket von 20 Karten je 5 Karten, der Rest geht in einen Talon (bei letzterem ist die Reihenfolge wichtig!).

(2P.)

Übung 122. Auf wieviele Arten kann man 15 ununterscheidbare Steckdosen auf 5 (unterscheidbare) Räume verteilen, sodaß

(a) in jeden Raum mindestens eine Steckdose kommt.
(b) ohne Einschränkung.
(c) in jeden Raum mindestens zwei Steckdosen kommen.

(2+2+2 P.)

Übung 123. Professor X hält seit 16 Semestern die gleiche Vorlesung.

(a) In jedem Semester erzählt er 3 Witze, aber niemals die gleichen 3 Witze
(b) In jedem Semester erzählt er 4 Witze, aber niemals die gleichen 4 Witze

(Reihenfolge spielt keine Rolle). Wieviele Witze muß er mindestens kennen?

(2 P.)

Übung 124. Zeige mit kombinatorischen Argumenten die Multinomialentwicklung

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=k} \binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

(3P.)

Übung 125. Auf wieviele Arten kann man n Buchstaben "A" und k Buchstaben "Z" so zu einem Wort anordnen, daß kein ZZ vorkommt?

(2 P.)

Übung 126. Wieviele 5-stellige Telephonnummern enthalten mindestens eine Ziffer, die mehrmals vorkommt?

(2P.)

Übung 127. Wieviele verschiedene Zahlenkombinationen kann man durch Werfen von 4 ununterscheidbaren Würfeln erzielen?

(2P.)

Übung 128. Wieviele ganzzahlige Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

unter der Voraussetzung

(a) $x_j > 0$
(b) $x_j \geq 0$

Wie hängen die Lösungen zusammen?

(2+2P.)

Übung 129. Herr Österreicher macht auf Mallorca Urlaub und geht in ein Postkartengeschäft. Es gibt Postkarten mit 30 verschiedenen Motiven. Wieviele Möglichkeiten hat Herr Österreicher, seine 23 Onkel und Tanten mit Postkarten zu beglücken, wenn jede(r)

(a) genau eine Postkarte bekommen soll?
(b) eine andere Postkarte bekommen soll?
(c) zwei verschiedene Postkarten bekommen soll?

(je 1P.)

Übung 130. Ein König wird auf die linke untere Ecke eines Schachbretts gestellt und soll in die rechte obere Ecke marschieren. Wieviele mögliche Wege gibt es, wenn er in jedem Schritt nur jeweils um ein Feld gerade nach rechts oder nach oben gehen darf?

(2P.)

Übung 131. An einer Fußballmeisterschaft nehmen N Mannschaften teil, von denen je zwei Mannschaften höchstens einmal gegeneinander spielen. Zeige mithilfe des Taubenschlagprinzips, daß es zu jedem Zeitpunkt mindestens zwei Mannschaften gibt, die genau die gleiche Anzahl von Spielen absolviert haben.

(3 P.)

Übung 132. Auf wieviele Arten kann man 13 Bälle in 27 Urnen verteilen, sodaß in jeder Urne höchstens 1 Ball zu liegen kommt, wenn

(a) die Bälle unterscheidbar sind?
(b) die Bälle ununterscheidbar sind?

(2+2P.)

Übung 133. Eine Gruppe von 30 Telematik-Studentinnen und Studenten, davon 4 Vegetarier, geht in die Mensa. Es gibt 3 verschiedene (fleischlose) Suppen, 5 Hauptgerichte, davon 2 vegetarisch, sowie 7 verschiedene süße Nachspeisen.

(a) Auf wieviele Arten können die 30 Personen jeweils ein Menü, bestehend aus Suppe, Hauptspeise und Nachspeise, zusammenstellen? (Vegetarier beachten!)
(b) Auf wieviele Arten können die 30 Personen jeweils ein Menü, bestehend aus Suppe, Hauptspeise und Nachspeise, zusammenstellen, wenn jede eine andere Speisenkombination bekommen soll? (Vegetarier beachten!)

Übung 134. Die Studentinnen und Studenten aus Aufgabe 133 nehmen an 5 Tischen zu je 6 Personen Platz.

(a) Auf wieviele Arten ist dies möglich (Sitzreihenfolge unwichtig)?
(b) Auf wieviele Arten können sie sich hinsetzen, wenn die Sitzreihenfolge berücksichtigt wird?
(c) Auf wieviele Arten können sie sich hinsetzen, wenn die 6 Studentinnen unter ihnen an einem Tisch sitzen wollen (Sitzreihenfolge unwichtig)?
(d) Auf wieviele Arten können sie sich hinsetzen, wenn die 6 Studentinnen unter ihnen an einem Tisch sitzen wollen und die Sitzreihenfolge berücksichtigt wird?

Übung 135. (a) Auf wieviele Arten kann man die Buchstaben des Wortes *MISSISSIPPI* anordnen?

(b) Auf wieviele Arten kann man die Buchstaben des Wortes *MISSISSIPPI* so anordnen, daß weder alle I's, S noch P's jeweils hintereinander stehen?

(1+3P.)

Übung 136. Eine Umfrage unter Studierenden an der TU hat die folgenden Anmeldungszahlen ergeben:

(a) 62 für Analysis
(b) 71 für Algebra
(c) 67 für Diskrete Mathematik
(d) 37 für Analysis und Algebra
(e) 32 für Analysis und Diskrete Mathematik
(f) 40 für Algebra und Diskrete Mathematik
(g) 12 für alle drei Fächer
(h) 44 für keines der drei Fächer

Beantworte folgende Fragen:

(a) Wieviele waren für Analysis und Algebra angemeldet, aber nicht für diskrete Mathematik?
(b) Wieviele waren für genau eines der drei Fächer angemeldet?
(c) Wieviele Studierende wurden befragt?

(3P.)

Übung 137. Seien $A, B, C \subseteq X$ endliche Mengen und bezeichne $\bar{B} = X \setminus B$. Leite die Formel

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B \cap C| + \left|\bar{B} \cap C\right| - |A \cap B \cap C| - \left|A \cap \bar{B} \cap C\right|$$

her.

Übung 138. Auf wieviele Arten kann man 10 rote und 10 blaue Luftballons auf 3 Kinder verteilen, und zwar

(a) ohne Einschränkung
(b) so, daß jedes Kind mindestens einen roten Luftballon bekommt.
(c) so, daß jedes Kind mindestens einen Luftballon bekommt.

(3P.)

Übung 139. Eine Zahl zwischen 2 und 100 ist prim, genau dann wenn $k < 10$ und prim ist oder wenn k von keiner Primzahl $p < 10$ geteilt wird. Bestimme die Anzahl der Primzahlen < 100 mithilfe des Inklusions-Exklusionsprinzips.

(3P.)

Übung 140.

Wieviele Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 1500\}$ sind durch 2, aber nicht durch 3 und 5 teilbar?

(3 P.)

Übung 141. Bestimme die Anzahl der verschiedenen Permutationen der Buchstaben $aabbxxxxxx$ in denen die a's und die b's jeweils getrennt sind: Erlaubt sind z.B. Wörter der Gestalt $ababxxxxxx$, nicht aber $bxbxaaxxxx$.

(2 P.)

Übung 142. Auf wieviele Arten kann man aus 8 Telematikern, 7 Informatikern und 7 Wissensmanagern zwei Fußballmannschaften bilden, sodaß in beiden Mannschaften jedes Fachgebiet vertreten ist?

D. Abzählende Potenzreihen

Übung 143. Zeige durch Koeffizientenvergleich für beliebiges $\alpha \neq 0$

$$\frac{d}{dx}(1+x)^\alpha = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

(2P.)

Übung 144. Bestimme durch Partialbruchzerlegung die Reihenentwicklung der Funktion

$$\frac{-7\,x+1}{2\,x^2-x-1}$$

(3P.)

Übung 145. Bestimme die Koeffizienten der rationalen Potenzreihe

$$\frac{7-5\,x}{(1-5\,x)^2\,(1+5\,x)}$$

(3P.)

Übung 146. Bestimme die Koeffizienten der Potenzreihe

$$f(x) = \frac{1}{(1-2x)^3}$$

mit Hilfe des verallgemeinerten binomischen Lehrsatzes (D.4.9).

(3P.)

Übung 147. Gegeben sei die Zahlenfolge $a_n = n \cdot 2^n + 3^n$. Finde geschlossene Ausdrücke für die erzeugenden Potenzreihen

$$(a) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad\qquad (b) \qquad E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n;$$

Letztere bezeichnet man als *exponentielle erzeugende Potenzreihe*.

(2+2P.)

Übung 148. Finde die erzeugende Funktion $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$ der *harmonischen Zahlen*

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Hinweis: D.(1.27).

(3P.)

Übung 149. Berechne für alle n

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Hinweis: Betrachte

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}\right)$$

und D.(1.27).

(4 P.)

Übung 150. Auf wieviele Arten kann man 25 Cent mit 7 Münzen bezahlen?

Hinweis: Beispiel D.(1.26) mit der Bewertung $)k \to x^k \cdot y$.

(4 P.)

Übung 151. Bestimme mittels erzeugender Funktionen

(a) die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von 7 Kugeln aus einer Urne mit 6 weißen, 6 roten und 6 schwarzen Kugeln, wobei nur eine gerade Zahl weißer, eine ungerade Zahl schwarzer, und eine durch 3 teilbare Zahl roter Kugeln entnommen werden darf.
(b) die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von 8 Kugeln aus einer Urne mit 7 weißen, 6 roten und 7 schwarzen Kugeln, wobei nur eine ungerade Zahl weißer, eine gerade Zahl schwarzer, und eine durch 3 teilbare Zahl roter Kugeln entnommen werden darf.

(3P.)

Übung 152. Gegeben seien $2n$ Kugeln, wovon n Kugeln weiß sind und die restlichen lauter verschiedene bunte Farben haben. Gesucht ist die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von n Kugeln unter Verwendung erzeugender Funktionen.

(3P.)

Übung 153. Die EDV-Beauftragte des Instituts für Rechnungswesen soll Computerbildschirme einkaufen. In der Ausverkaufsabteilung des Elektrofachmarkts gibt es noch 3 Monitore zu €200, 4 Monitore zu €300, 4 Monitore zu €400, sowie 3 Monitore zu €500. Auf wieviele Arten kann sie Monitore einkaufen, wenn das Budget von 2500€ voll ausgenutzt werden soll?

(8P.)

Übung 154. Die *Tribonaccizahlen* sind gegeben durch die Rekursion

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

mit den Anfangswerten $T_0 = 1$, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$. Bestimme die erzeugende Funktion der Tribonaccizahlen.

(2P.)

Übung 155. Zeige, daß

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Hinweis: Vergleiche die Reihenentwicklungen von

$$(1+x)^{2n} \text{ und } (1+x)^n(1+x)^n.$$

(2P.)

ÜBUNG 156. Löse die Rekursionsgleichungen

(a) $a_{n+2} - a_{n+1} - 3a_n = 2^n, \quad n \geq 0$ $\quad a_0 = 1 \quad a_1 = 2$

(b) $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = (n+1)\,2^n, \quad n \geq 0$ $\quad a_0 = 1 \quad a_1 = 1$

(3+3P.)

ÜBUNG 157. Finde die erzeugende Funktion $F_k(x) = \sum_m a_{km} x^m$ für die Anzahl a_{km} der Möglichkeiten, mit k Würfeln die Summe m zu würfeln.

(3P.)

ÜBUNG 158. Berechne die exponentielle erzeugende Potenzreihe $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$ der Folgen b_n, die gegeben sind durch die Rekursionen

(a) $b_0 = 1 \quad b_n = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}, \quad n \geq 0$

(b) $b_0 = 1 \quad b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}, \quad n \geq 0$

(4+4P.)

E. Graphen und Bäume

ÜBUNG 159. Zeichne den "Nachbarschaftsgraphen" der europäischen Union, bestimme die Kanten- und Knotenmenge und färbe ihn mit möglichst wenigen Farben.

(2P.)

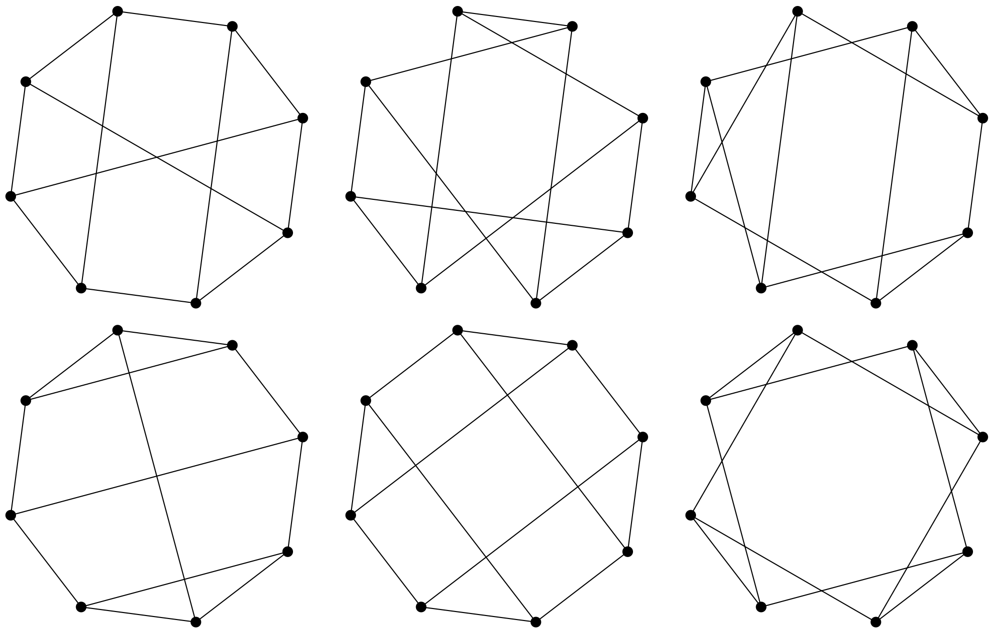
ÜBUNG 160. Zeige, daß in einem ungerichteten Graphen G die Relation

$$x\,R\,y \iff \exists \text{ Weg von } x \text{ nach } y$$

eine Äquivalenzrelation ist. Welche Relation erhält man, wenn man "Weg" durch "Pfad" ersetzt?

(3P.)

ÜBUNG 161. Zwei Graphen G_1 und G_2 heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V(G_1) \to V(G_2)$ zwischen beiden Knotenmengen gibt, sodaß $[x, y] \in E(G_1) \iff [f(x), f(y)] \in E(G_2)$. Isomorphe Graphen werden üblicherweise identifiziert. Die folgenden Bilder zeigen sechs Graphen, von denen jeweils zwei zueinander isomorph sind. Finde die drei isomorphen Paare.



(3P.)

Übung 162. Bestimme alle nicht-isomorphen Graphen mit $n = 2$, 3, oder 4 Knoten (nicht-zusammenhängende Graphen miteingeschlossen).

Übung 163. Die Gradfolge eines Graphen ist die Folge der Grade der einzelnen Knoten, z.B. haben die Graphen aus Beispiel 161 alle die Gradfolge $(3,3,3,3,3,3,3,3)$. Ist es möglich, Graphen (ohne Schleifen und Mehrfachkanten) mit den folgenden Gradfolgen zu konstruieren?

(a) $(3,3,3,3)$	(b) $(1,2,3,4)$
(c) $(3,3,3,2,1)$	(d) $(1,1,1,1,1)$

(je 2P.)

Übung 164. Bestimme alle möglichen Gradfolgen eines Graphen mit vier Knoten (nicht-zusammenhängende Graphen miteingeschlossen).

(2P.)

Übung 165. Finde zwei zueinander nicht isomorphe Graphen mit der Gradfolge $(2,2,3,3,3,3)$.

Übung 166. Zeige, daß die Gradfolge eines Graphen nicht aus lauter verschiedenen Zahlen bestehen kann, d.h., in jedem Graphen haben mindestens zwei Knoten den gleichen Grad.

NB: Schleifen sind nicht erlaubt.

(2P.)

Übung 167. Bei einem Politikertreffen nehmen 16 Herren und eine unbekannte Anzahl Damen teil. Bei der Begrüßung schüttelt jeder der Herren je 5 Damen die Hände und umgekehrt schüttelt jede Dame je 8 Herren die Hand. Wieviele Damen nehmen an dem Treffen teil?

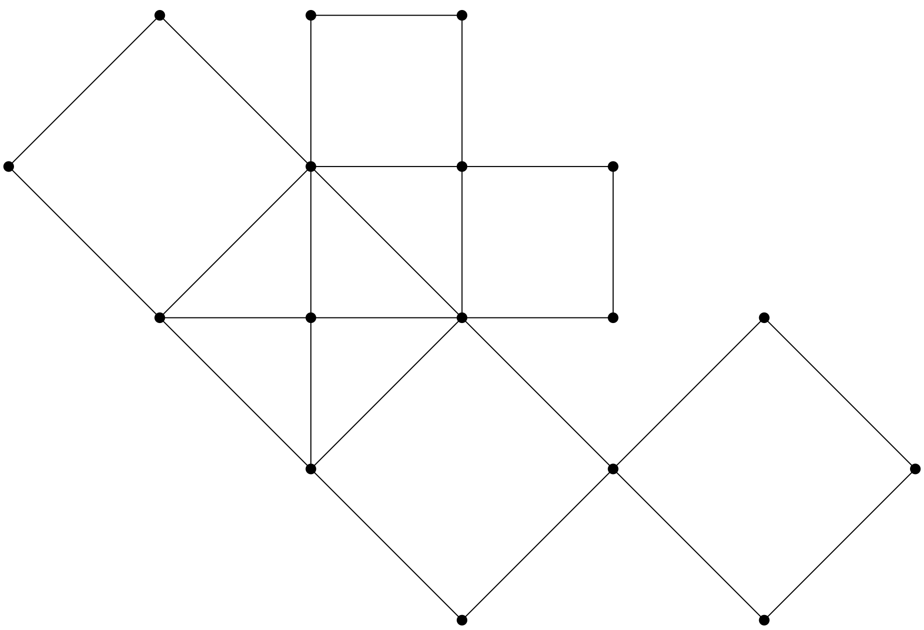
(2P.)

Übung 168. Ein Dominospiel besteht aus Spielsteinen mit allen möglichen (ungeordneten) Kombinationen von zwei Symbolen aus einer gegebenen Symbolmenge. Ist es möglich, alle Dominosteine gemäß den Dominoregeln in einem Kreis anzuordnen, wenn

(a) Die Symbole □, ⚀, ⚁, $\dots$, ⚅ erlaubt sind?
(b) Die Symbole ⚀, ⚁, $\dots$, ⚅ erlaubt sind?

(4P.)

Übung 169. Gegeben sei der Graph



Finde, wenn möglich, einen Eulerschen Kreis bzw. Weg mithilfe des Algorithmus von Fleury.

(2P.)

Übung 170. Die Staubsaugervertreter E, A, D und S treffen sich mit den Heißluftexperten K und G zum geheimen Informationsaustausch auf einer Yacht. Dabei muß immer gewährleistet sein, daß mindestens eine und höchstens zwei Personen zugleich auf der Yacht sind und außerdem müssen genau die folgenden Personen je 5 Minuten lang zusammentreffen:

E trifft auf A und G
A trifft auf D, S und K
D trifft auf K und G
S trifft auf G

Wie ist das in möglichst kurzer Zeit zu bewerkstelligen?

Übung 171. Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

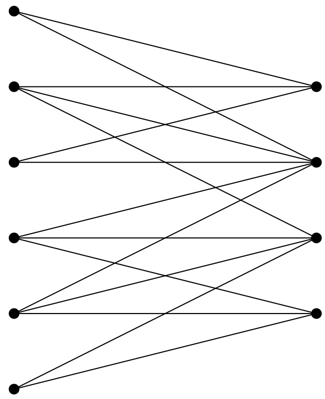
und Kanten

$$E = \{[1,2], [1,3], [1,4], [2,3], [3,4], [3,5], [3,6], [4,5], [4,6], [5,6]\}.$$

Zeichne diesen Graphen und stelle fest, ob er planar ist.

(2P.)

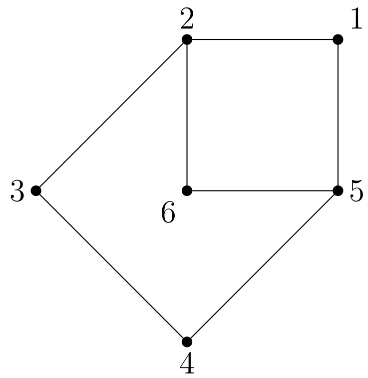
Übung 172. Zeige, daß der Graph



keinen Hamiltonschen Kreis besitzt.

(3P.)

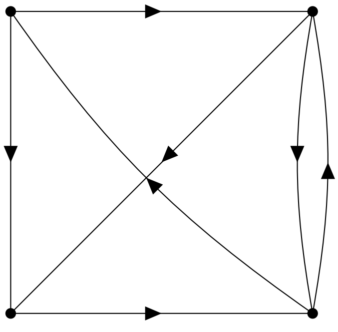
Übung 173. Gegeben sei der Graph



Erstelle die Adjazenzmatrix und finde die Anzahl der Wege der Länge 5 von Knoten 2 nach Knoten 3.

(4P.)

Übung 174. Bestimme die Adjazenzmatrix des Graphen



und bestimme die Anzahl der Wege der Länge 7 von der linken oberen zur rechten unteren Ecke.

(4P.)

Übung 175. Bestimme

(a) die Funktion $w_{1,1}(z)$ und
(b) die Anzahl der geschlossenen Wege der Länge k mit Ausgangsknoten 1.

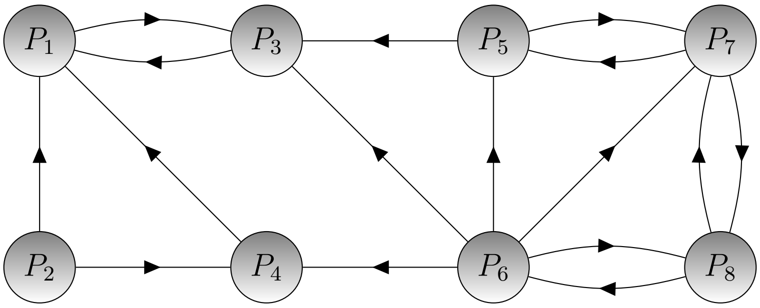
für die folgenden (Di-)Graphen

(i) ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten, $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{[1, 2]\ ,\ [1, 3]\ ,\ [2, 3]\}$
(ii) gerichteter Graph ohne Mehrfachkanten, $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{[1 \to 2]\ ,\ [2 \to 1]\ ,\ [2 \to 3]\ ,\ [3 \to 1]\ ,\ [1 \to 3]\}$.

(Es ist empfehlenswert, am Ende der Rechnungen die Probe für $k = 0, 1, 2$ zu machen !)

(4+4P.)

Übung 176. Gegeben sei das Miniatur-Internet



Erstelle die Google-Matrix und bestimme näherungsweise den Pagerank aller Seiten durch Iteration (50-100 müßten reichen) mit Hilfe eines Computeralgebrasystems, z.B. mit SAGE (`http://www.sagemath.org`), und zwar zunächst mit $\alpha = 1$, dann mit $\alpha = 0.85$. Was fällt auf? Wie kann man das Phänomen erklären?

(4 P.)

Übung 177. Wieviele Bäume enthält ein Wald mit n Knoten und m Kanten?

(2P.)

Übung 178. Zeichne alle nicht isomorphen Bäume mit

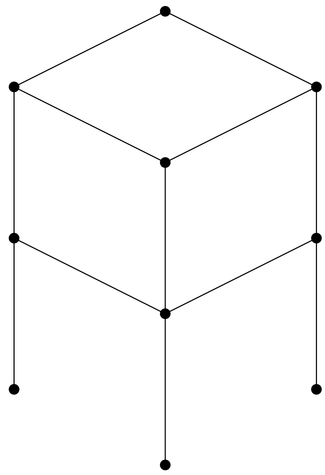
(a) 6 Knoten
(b) 7 Knoten

(je 2P.)

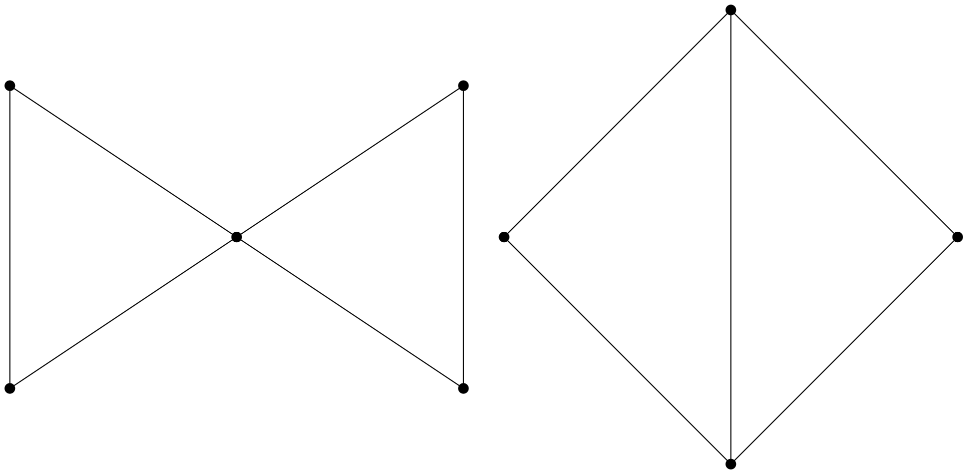
Übung 179. Bestimme einen

(a) BFS-Spannbaum
(b) DFS-Spannbaum

des Graphen

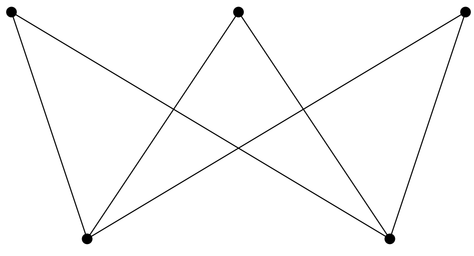


ÜBUNG 180. Bestimme alle Spannbäume der folgenden Graphen



(3P.)

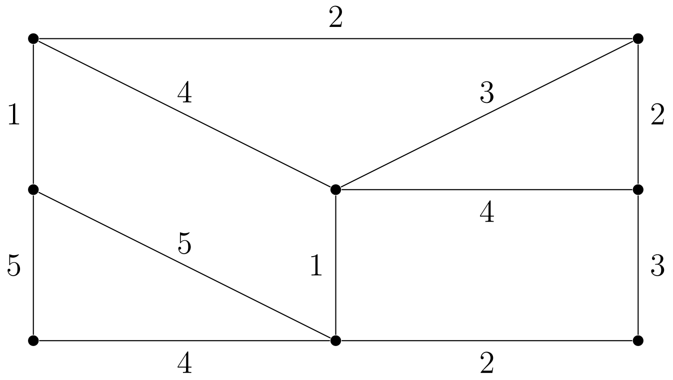
ÜBUNG 181. Wieviele Spannbäume hat der $K_{2,3}$?



$K_{2,3}$

(3P.)

ÜBUNG 182. Bestimme alle minimalen Spannbäume des folgenden gewichteten Graphen:

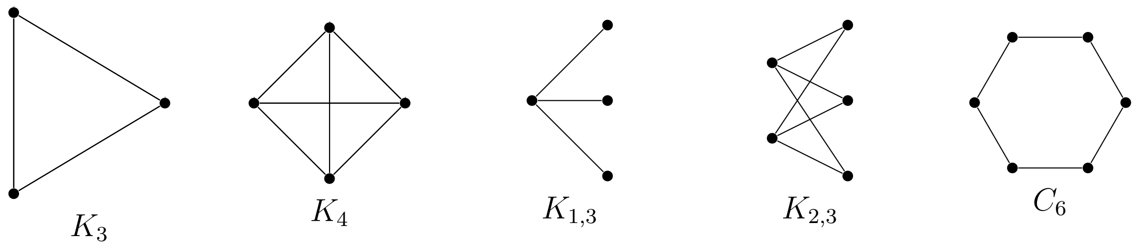


(3P.)

ÜBUNG 183. Sei G ein ungerichteter Graph mit Kanten $e_1, e_2, \dots, e_m$. Der *Kantengraph* $L(G)$ ist der folgendermaßen definierte ungerichtete Graph:

> Die Knoten von $L(G)$ sind $v_1, v_2, \dots, v_m$.
> $[v_i, v_j]$ ist eine Kante von $L(G)$ genau dann, wenn e_i und e_j einen gemeinsamen Knoten in G haben.

Zeichne die Kantengraphen von K_3, K_4, $K_{1,3}$, $K_{2,3}$ und C_6:



(3P.)

ÜBUNG 184. Ein *Eulerscher Graph* ist ein Graph, der einen Eulerschen Kreis besitzt. Zeige, daß der Kantengraph eines Eulerschen Graphen wieder Eulerscher Graph ist.

Gilt auch die Umkehrung?

(2P.)