

Aufgabe 21. Berechne $2^{33} \bmod 4725$.

Hinweis:

1. 4725 in Primfaktoren $p_i^{k_i}$ zerlegen.
2. $2^{33} \bmod p_i^{k_i}$ für alle Primfaktoren berechnen.
3. Die Lösung mit dem chinesischen Restsatz ermitteln.

(3P.)

Aufgabe 22. Welche der folgenden Strukturen $(X, \circ)$ bilden Halbgruppen, Monoide, Gruppen? In welchen gilt das Kommutativgesetz?

- (a) $(\mathbb{Q}, \circ)$ mit $x \circ y = 2x + y$
- (b) $(\mathbb{N}, \circ)$ mit $x \circ y = \max(x, y)$.
- (c) Sei U eine Menge, und $X = \mathcal{P}(U)$ die Potenzmenge

$$X = \{A : A \subseteq U\}$$

ausgestattet mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \cup B$$

- (d) X wie vorher mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- (e) X beliebig mit der Verknüpfung

$$a \circ b = a$$

für alle $a, b \in X$.

(je 2P.)

Aufgabe 23. (a) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $x_0 \in G$. Zeige, daß die Abbildung

$$f : G \rightarrow G$$

$$x \mapsto x_0 \circ x$$

bijektiv ist.

- (b) Folgere daraus, daß die Zahlen $a, 2a, \dots, (p-1)a$ alle verschiedene Reste modulo p haben, wenn p eine Primzahl und $a \not\equiv 0 \bmod p$ ist.

(3 P.)