Aufgabe 1. Beweise durch vollständige Induktion die folgende Formel für die Summe der ersten n Quadrate:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

(3 P.)

Aufgabe 2. Finde mithilfe des euklidischen Algorithmus für die folgenden Zahlenpaare (m, n) den größten gemeinsamen Teiler d und Zahlen a und b, sodaß $am + bn = d$.

$$\begin{aligned} &(a) \quad (231, 142) \\ &(b) \quad (429, 2017) \end{aligned}$$

(je 2 P.)

Aufgabe 3. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sodaß $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$. Zeige, daß $\operatorname{ggT}(m+n, m-n) = 1$ oder 2. (2 P.)

Aufgabe 4. Seien m und n ganze Zahlen. Zeige: wenn ganze Zahlen a und b existieren mit $am + bn = 1$, dann ist $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$. (3 P.)

Aufgabe 5. Sei F_n die Folge der Fibonacci-Zahlen, gegeben durch die Rekursion

$$F_0 = F_1 = 1 \qquad\qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Zeige, daß $\operatorname{ggT}(F_n, F_{n+1}) = 1$ für jedes n (Induktion). (2 P.)

Aufgabe 6. Zeige durch vollständige Induktion, daß für jede natürliche Zahl n die Zahl

$$3^{2n-1} + 2^{2n-1}$$

durch 5 teilbar ist. (3P.)

Aufgabe 7. Zeige, daß mit der Primfaktorzerlegung $n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_n(p)}$ gilt

$$\operatorname{ggT}(m, n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min(\nu_m(p), \nu_n(p))}.$$

Überprüfe dies anhand der Beispiele aus Übung 2. (3P.)

Aufgabe 8. Bestimme alle m, $n \in \mathbb{N}$ sodaß $\operatorname{ggT}(m, n) = 36$ and $\operatorname{kgV}(m, n) = 360$. (2P.)

Aufgabe 9. Untersuche, welche der folgenden Relationen die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität, Äquivalenzrelation oder Halbordnungsrelation erfüllen und bestimme ggf. die Äquivalenzklassen.

(a) $X = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$.

(b) $X = \{a, b, c, d\}$, R entsprechend der folgenden Tabelle:

	a	b	c	d
a	×	×	×	×
b		×		
c			×	
d		×	×	×

(c) $X = \mathbb{C}$, $z_1 R z_2 \iff \operatorname{Im} z_1 \leq \operatorname{Im} z_2$.

(d) $X = \mathbb{N}$, $mRn \iff 3 \mid (m - n)n$

(e) $X = \mathbb{N}$, $mRn \iff m \mid n$

(f) $X = \mathbb{N}$, $mRn \iff m - n = 5$

(je 2P.)

Aufgabe 10. Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Bilde die kleinste Äquivalenzrelation auf A, die die Elemente $(1, 3)$ und $(4, 3)$ enthält. (3P.)

Aufgabe 11. Zeige, daß die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen sind und bestimme die Äquivalenzklassen.

(a) $X = \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \sim (u, v) :\iff x - y = u - v$$

(b) $X = \mathbb{R}$,

$$x \sim y :\iff x - y \in \mathbb{Z}$$

(2+2 P.)

Aufgabe 12. Für die *Internationale Standardbuchnummer* gibt es zwei Standards.

1. Die alte ISBN-10 hat 10 Ziffern,

   $$x_1 x_2 x_3 \cdots x_{10},$$

   wobei $x_1, x_2, \ldots, x_9 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und $x_{10} \in \{0, 1, \ldots, 9\} \cup \{X\}$ wobei das Symbol X für den Wert 10 steht und die letzte Ziffer x_{10} eine Prüfziffer ist, sodaß

   $$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 9x_9 + 10x_{10} \equiv 0 \mod 11$$

   Beispiel: 3540257829
2. Die neue ISBN-13 hat 13 Ziffern,

   $$z_1 z_2 z_3\text{-}z_4 \cdots z_{13},$$

   wobei $z_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und der Präfix $z_1 z_2 z_3$ entweder 978 oder 979 ist und die letzte Ziffer z_{13} eine Prüfziffer ist, die so gewählt wird, daß

   $$z_1 + 3z_2 + z_3 + 3z_4 + \cdots z_{11} + 3z_{12} + z_{13} \equiv 0 \mod 10$$

   (gerade Stellen mit 3 multiplizieren) z.B. entspricht die obige ISBN-10 im neuen Standard der Nummer 978-3540257820.

(a) Berechne die Prüfziffern der folgenden unvollständigen ISBN

978-3-642-37971

364254273

(b) Erkläre, warum auch die Regel

$$10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + \cdots + 2x_9 + x_{10} \equiv 0 \mod 11$$

für die Überprüfung einer ISBN-10 verwendet werden kann.

(2+2 P.)

Aufgabe 13. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $43 \equiv 1 \mod n$? (2P.)

Aufgabe 14. Bestimme $[12]_{91}^{-1}$. (2P.)

Aufgabe 15. Bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der Gleichungen

(a) $15x \equiv 5 \mod 25$

(b) $15x \equiv 6 \mod 25$

(3P.)

Aufgabe 16. Bestimme alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 6x + 3y &\equiv 9 \mod m \\ 5x + 6y &\equiv -3 \mod m \end{aligned}$$

für

(a) $m = 7$ (b) $m = 11$

Hinweis: Lineares Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_m$ lösen! (3P.)

Aufgabe 17. Bestimme alle Lösungen der diophantischen Gleichung

$$45x - 105y = 75$$

(2P.)

Aufgabe 18. Löse das Kongruenzgleichungssystem

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 5 \\ x &\equiv 2 \mod 7 \\ x &\equiv 3 \mod 8 \\ x &\equiv 4 \mod 9 \end{aligned}$$

(3P.)

Aufgabe 19. Löse, wenn möglich, die folgenden Kongruenzgleichungssysteme

$$(a) \quad \begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 2 \mod 9 \\ x &\equiv 1 \mod 10 \end{aligned} \qquad (b) \quad \begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 5 \\ x &\equiv 3 \mod 9 \\ x &\equiv 2 \mod 10 \end{aligned}$$

(3P.)

Aufgabe 20. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeige: Wenn für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: $a \equiv b \mod m$ und $a \equiv b \mod n$, dann gilt auch $a \equiv b \mod \mathrm{kgV}(m, n)$. (4P.)

Aufgabe 21. Berechne $2^{33} \mod 4725$.
Hinweis:

1. 4725 in Primfaktoren $p_i^{k_i}$ zerlegen.
2. $2^{33} \mod p_i^{k_i}$ für alle Primfaktoren berechnen.
3. Die Lösung mit dem chinesischen Restsatz ermitteln.

(3P.)

Aufgabe 22. Welche der folgenden Strukturen $(X, \circ)$ bilden Halbgruppen, Monoide, Gruppen? In welchen gilt das Kommutativgesetz?

(a) $(\mathbb{Q}, \circ)$ mit $x \circ y = 2x + y$

(b) $(\mathbb{N}, \circ)$ mit $x \circ y = \max(x, y)$.

(c) Sei U eine Menge, und $X = \mathcal{P}(U)$ die *Potenzmenge*

$$X = \{A : A \subseteq U\}$$

ausgestattet mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \cup B$$

(d) X wie vorher mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(e) X beliebig mit der Verknüpfung

$$a \circ b = a$$

für alle $a, b \in X$.

(je 2P.)

Aufgabe 23. (a) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $x_0 \in G$. Zeige, daß die Abbildung

$$f : G \to G$$
$$x \mapsto x_0 \circ x$$

bijektiv ist.

(b) Folgere daraus, daß die Zahlen a, $2a, \ldots,$ $(p-1)a$ alle verschiedene Reste modulo p haben, wenn p eine Primzahl und $a \not\equiv 0 \mod p$ ist.

(3 P.)

Aufgabe 24. Berechne ohne Taschenrechner $14^{(2017^{2017})} \mod 60$. (3P.)

Aufgabe 25. Bestimme Zahlen a_0, a_1, $a_2 \in \mathbb{Z}_3$, sodaß die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_3 &\to \mathbb{Z}_3 \\ 0 &\mapsto 1 \\ 1 &\mapsto 0 \\ 2 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

durch die Formel $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ dargestellt wird.

Aufgabe 26. (a) Beschreibe und berechne einen Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch mit den Parametern $p = 31$, $g = 5$, $a = 13$, $b = 11$.

(b) Zu einem Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch seien folgende Daten bekannt:

$$g = 7 \qquad p = 29$$
$$m = 24 \qquad n = 23$$

Bestimme wenn möglich die geheimen Parameter a, b und den Schlüssel r!

(2+3P.)

Aufgabe 27. Entschlüssle den folgenden Text (Satz- und Leerzeichen sind unverschlüsselt). Die Verwendung eines Computers für statistische Analyse etc. ist erlaubt (den String gibt es auch als Textdatei auf der Internetseite[1]), die Vorgangsweise muß jedoch ausführlich erläutert werden. (3P.)

BLP JKLPPHPUGW KLDWHZHPUGW LKMGLTWD EZDWOPUGWHBWD
PHUG FAY LOUGLHPUGWZ KLDWHZHPUGWZ LKMGLTWD
LTUBWXGHJKYZAMNOPDFS BEOUG BHW QEPLWDQKHUGWZ
TEUGPDLTWZ C, V EZB Q. PMEOHEP ULOFHKHEP OECL PAKK WP
CWRWPWZ PWHZ, BWO BEOUG GHZQEPWDQWZ WHZWP
BHLJOHDHPUGWZ PDOHUGWP QEY U BWZ EZDWOPUGHWB FAZ U EZB C
WHZXEWGODW. BLP ZWEW C REOBW LZ BWO PDWKKW BWP
WZDXLKKWZWZ Q HZ BLP LKMGLTWD WHZCWOWHGD. RWHDWOW
FWOLWZBWOEZCWZ WOCLTWZ PHUG, ZLUGBWY BLP COHWUGHPUGW
YEDDWOKLZB EZDWORAOXWZ EZB BWY PDLLDPCWTHWD BWO
OAWYHPUGWZ OWMETKHJ WHZCWCKHWBWOD RAOBWZ RLO EZB
FWOPDLWOJDWO TWBLOX WZDPDLZB, COHWUGHPUGW ZLYWZ EZB
XOWYBRAWODWO HZ KLDWHZHPUGWO PUGOHXD RHWBWOQECWTWZ.
HY WOCWTZHP TWPDLZB BLP KLDWHZHPUGW LKMGLTWD LEP
BOWHEZBQRLZQHC, ZLWYKHUG LTUBWXCGHJKYZAMNOPDFSVQ. BHW
QEPLWDQKHUGWZ TEUGPDLTWZ IER REOBWZ WOPD HY
YHDDWKLKDWO WHZCWXEWGOD.

[1] https://www.math.tugraz.at/mathc/diskmath/2017/Uebungsblaetter/aufgabe27.txt

Aufgabe 28. (a) Berechne die Eulersche Funktion $\varphi(m)$ für die Zahl $m = 9625$.
(b) Zeige, daß $a^{\varphi(m)+1} \not\equiv a \mod m$ genau dann gilt, wenn $\operatorname{ggT}(a, 125) \in \{5, 25\}$.
Hinweis: Chinesischer Restsatz! (2+4P.)

Aufgabe 29. Die Zahlenfolge $(1214, 124, 934, 168)$ wurde mit dem RSA-Algorithmus mit öffentlichem Schlüssel

$$(m = 1247, r = 761)$$

verschlüsselt.
Finde den privaten Schlüssel s und entschlüssle die Nachricht (Die Buchstaben sind paarweise mit der Konvention aus der Vorlesung codiert). (3P.)

Aufgabe 30. Sei $m = pq$ und $\operatorname{ggT}(r, \varphi(m)) = 1$. Aus dem euklidischen Algorithmus folgt, daß es ein $s \in \mathbb{Z}$ gibt sodaß $rs \equiv 1 \mod \varphi(m)$. Warum stimmt die Behauptung aus der Vorlesung, daß immer $s \in \mathbb{N}$, d.h. $s > 0$, gewählt werden kann? (2P.)

Aufgabe 31. Das folgende Beispiel illustriert, daß die Wahl kleiner Schlüssel die Sicherheit des RSA-Verfahrens verringert.
Bob schickt die gleiche Botschaft an seine Freundinnen Alice, Angela und Adina, die ihm vorher die öffentlichen Schlüssel $(m_1 = 901, r_1 = 3)$, $(m_2 = 1081, r_2 = 3)$ und $(m_3 = 1189, r_3 = 3)$ bekanntgegeben haben. Die drei Botschaften sind $y_1 = (434, 606, 552)$, $y_2 = (879, 980, 373)$ und $y_3 = (757, 1175, 914)$. Entschlüssle die Botschaft, ohne die Primfaktorzerlegung der Schlüssel m_i durchzuführen (Computer oder Taschenrechner für Zwischenrechnungen ist zugelassen). (3P.)

Aufgabe 32. Im folgenden verschlüsselten Text wurde je ein Caesar-Schlüssel für die Buchstaben an geraden und ungeraden Stellen verwendet:

DJELYNDNZWVWCNTQKBLWUAZWBBBJEWDJE
WZLYCMNCFVLYBVAEFVATQVRERCUKDD

(Leerzeichen wurden entfernt und sind nicht Teil des Alphabets) (2P.)

Aufgabe 33. Überprüfe anhand von Wahrheitstafeln, ob die folgenden Aussageformen äquivalent sind:
(a) $(A \to B) \to C$ und $A \to (B \to C)$
(b) $(\neg A \to B) \to (B \lor C)$ und $(A \to B) \lor C$. (je 2P.)

Aufgabe 34. Der Kommissar befragt die Verdächtigen Alice, Bob und Charles für eine Tat. Jede Person lügt einmal und sagt einmal die Wahrheit.

Alice sagt: Ich war es nicht. Bob hat es getan.
Bob sagt: Ich war es nicht. Ich weiß, daß Charles es getan hat.
Charles sagt: Ich war es nicht. Bob weiß nicht, wer es war.

Wer hat es getan? (3P.)

Aufgabe 35. Alice, Bob und Charles sind zu einer Geburtstagsfeier eingeladen. Wie das bei den Leuten so ist, haben alle Vorbehalte:
(a) Wenn Charles nicht kommt, dann kommt auch Bob nicht.
(b) Entweder Bob oder Charles kommt, aber nicht beide.
(c) Charles und Alice kommen, wenn sie kommen, nur zusammen.
Formalisiere die Aussagen und stelle fest, wer zur Feier kommt. (3P.)

Aufgabe 36. Im ersten Teil von Goethes Faust heißt es in der 2. Studierzimmer-Szene

Der Philosoph, der tritt herein
Und beweist Euch, es müßt' so sein:
Das Erst' wär' so, das Zweite so,
Und drum das Dritt' und Vierte so;
Und wenn das Erst' und Zweit' nicht wär',
Das Dritt' und Viert' wär' nimmermehr,

Präzisiere diese Argumentation unter Verwendung von Klammern, erstelle die entsprechende Aussageform und bestimme alle Belegungen, die sie erfüllen. (2P.)

Aufgabe 37. Wir analysieren die möglichen Interpretationen der folgenden Aussage:

Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht oder nachgemachte oder verfälschte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird mit Freiheitsstrafe nicht unter zwei Jahren bestraft.

Zerlege und formalisiere die Aussage, und stelle fest, wie die Justiz in folgenden Fällen vorgehen wird.
(a) Uwe hat sich nachgemachte Geldnoten verschafft, aber nicht in Verkehr gebracht. Was passiert mit ihm?
(b) Karlheinz hat Banknoten gedruckt, aber nur zur Dekoration seiner Tiroler Bauernstube. Was passiert mit ihm?

Sind folgende Situationen denkbar? Wie kann man den Spruch modifizieren, damit Winkeladvokaten keine Chance haben?
(c) Silvio hat sich Blüten verschafft und in Verkehr gebracht, und wird nicht bestraft.
(d) Walter ist zu zwei Jahren Freiheitsstrafe verurteilt worden, obwohl er keine Banknoten nachgemacht hat.

(3P.)

Aufgabe 38. Zeige die Äquivalenz $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \iff B$
(a) anhand der Wahrheitstafel
(b) duch logisches Schließen[2]

(2+2P.)

Aufgabe 39. Beweise mit den Regeln des logischen Schließens den **Modus Tollens**

$$((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P.$$

(3P.)

Aufgabe 40. Beweise mit den Regeln des logischen Schließens[2] das Klammer-Änderungsgesetz für "$\to$":

$$A \to (B \to C) \iff (A \wedge B) \to C$$

(3P.)

Aufgabe 41. Alice, Bob, Charles, David und Eva sagen jeweils immer die Wahrheit oder die Unwahrheit. Schließe aus den folgenden Aussagen, wer lügt und wer die Wahrheit sagt.

1. Eva sagt: "Unter Alice, Charles und David befindet sich mindestens ein Lügner oder eine Lügnerin."
2. Alice sagt: "Bob lügt nur dann, wenn David die Wahrheit sagt."
3. Bob sagt: "Wenn Charles nicht lügt, dann ist entweder Alice oder David ein Lügner."
4. Charles sagt: "Eva lügt, und auch Alice oder Bob lügen."
5. David sagt: "Wenn Bob die Wahrheit sagt, dann auch Alice oder Charles."

Hinweis: Zwei Personen lügen immer, die anderen drei sagen immer die Wahrheit.

(4P.)

Aufgabe 42. Bringe die Formel $(A \wedge B) \leftrightarrow C$ auf

(a) 3-KNF (b) 3-DNF

[2]siehe `https://www.math.tugraz.at/mathc/diskmath/2017/Uebungsblaetter/logikregeln.pdf`

Aufgabe 43. Bestimme die Menge der Folgerungen, die aus der Prämissenmenge

$$\begin{aligned} P_1 &:\iff A \to (B \to C) \\ P_2 &:\iff A \vee ((B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C)) \\ P_3 &:\iff B \to C \end{aligned}$$

hergeleitet werden können. (3P.)

Aufgabe 44. Entscheide mittels Resolutionskalkül, ob die folgenden Aussageformen erfüllbar sind und bestimme alle gültigen Belegungen.

(a) $(A_3 \vee \neg A_4) \wedge (A_1 \vee A_2) \wedge (\neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_2) \wedge (\neg A_2 \vee A_3 \vee A_4)$

(b) $(A_3 \to (A_1 \vee A_2)) \wedge (A_3 \vee A_4) \wedge (A_1 \to A_4) \wedge (A_2 \to A_1) \wedge (\neg A_2 \vee \neg A_4)$

(3+3P.)

Aufgabe 45. Bestimme alle paarweise nicht-äquivalenten Aussageformen (d.h., Wahrheitstafeln), die aus den Variablen A und B sowie dem Junktor $\to$ (Implikation) aufgebaut werden können. (3P.)

Aufgabe 46. Sei $\mathcal{L}$ die Sprache der Logik. Eine Teilmenge $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ heißt *vollständig*, wenn jede Formel aus $\mathcal{L}$ zu einer Formel aus $\mathcal{L}'$ äquivalent ist.
Zu einer Menge $\mathcal{J}$ von Junktoren bezeichne $\mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ die Menge aller Formeln, die nur unter Verwendung der Junktoren aus $\mathcal{J}$ aufgebaut werden können.
Zeige:
(a) $\mathcal{L}_{\{|\}}$ ist vollständig, wobei $A \mid B :\iff \neg(A \wedge B)$ (Schefferscher Strich).
(b) $\mathcal{L}_{\{\neg,\to\}}$ ist vollständig. (3+3P.)

Aufgabe 47. In der Fuzzy-Logik werden nicht nur die Wahrheitswerte 0 und 1, sondern beliebige Werte im Intervall $[0,1]$ zugelassen. Eine Belegung ist daher eine Funktion $\beta : \mathcal{V} \to [0,1]$; die logischen Operationen sind wie folgt definiert:

$$\beta(\neg A) = 1 - \beta(A) \qquad \beta(A \wedge B) = \min(a,b) \qquad \beta(A \vee B) = \max(a,b)$$

Zeige, daß die Regeln von de Morgan

$$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B) \qquad \neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$$

auch für die Fuzzy-Logik gelten, d.h., das links und rechts jeweils das gleiche Ergebnis herauskommt.

(3P.)

Aufgabe 48. Bestimme die Reihenentwicklungen der rationalen Funktionen

$$\text{(a)} \quad \frac{-10\,x+3}{12\,x^2-7\,x+1} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \frac{4\,x-1}{4\,x^2-4\,x+1}$$

(2+3P.)

Aufgabe 49. Berechne mit erzeugenden Funktionen die Anzahl der Möglichkeiten, 7 Kugeln aus einer Urne mit 6 weißen, 6 roten und 6 schwarzen Kugeln zu ziehen, wobei nur eine gerade Zahl weißer, eine ungerade Zahl schwarzer, und eine durch 3 teilbare Zahl roter Kugeln entnommen werden darf. (3P.)

Aufgabe 50. Berechne eine Formel für $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ mit Hilfe von erzeugenden Funktionen. (3P.)

Aufgabe 51. Auf wieviele Arten kann man 25 Cent mit 7 Münzen bezahlen?
Hinweis: Verwende die Bewertung $x^k y$ für eine Münze mit Wert k und bestimme den Koeffizienten von $x^{25}y^7$ in der erzeugenden Funktion. (3P.)

Aufgabe 52. Löse die Rekursionsgleichung

$$a_{n+2} - 2\,a_{n+1} - 8\,a_n = (n+1)\,2^n, \quad n \geq 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1.$$

(3P.)

Aufgabe 53. Zeige, daß in einem ungerichteten Graphen G die Relation

$$x\,R\,y \iff \exists \text{ Weg von } x \text{ nach } y$$

eine Äquivalenzrelation ist. Welche Relation erhält man, wenn man "Weg" durch "Pfad" ersetzt? (3P.)

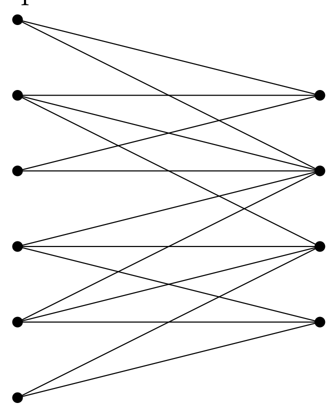
Aufgabe 54. Bei einem Familientreffen nehmen 16 Herren und eine unbekannte Anzahl Damen teil. Bei der Begrüßung schüttelt jeder der Herren je 5 Damen die Hände und umgekehrt schüttelt jede Dame je 8 Herren die Hand. Wieviele Damen nehmen an dem Treffen teil? (2P.)

Aufgabe 55. Ein Dominospiel besteht aus Spielsteinen mit allen möglichen (ungeordneten) Kombinationen von zwei Symbolen aus einer gegebenen Symbolmenge. Ist es möglich, alle Dominosteine gemäß den Dominoregeln in einem Kreis anzuordnen, wenn

(a) Die Symbole □, ⚀, ⚁, …, ⚅ erlaubt sind?
(b) Die Symbole ⚀, ⚁, …, ⚅ erlaubt sind?

(3P.)

Aufgabe 56. Zeige, daß der Graph



keinen Hamiltonschen Kreis besitzt. (3P.)

Aufgabe 57. Die Gradfolge eines Graphen ist die Folge der Grade der einzelnen Knoten in absteigender Ordnung.

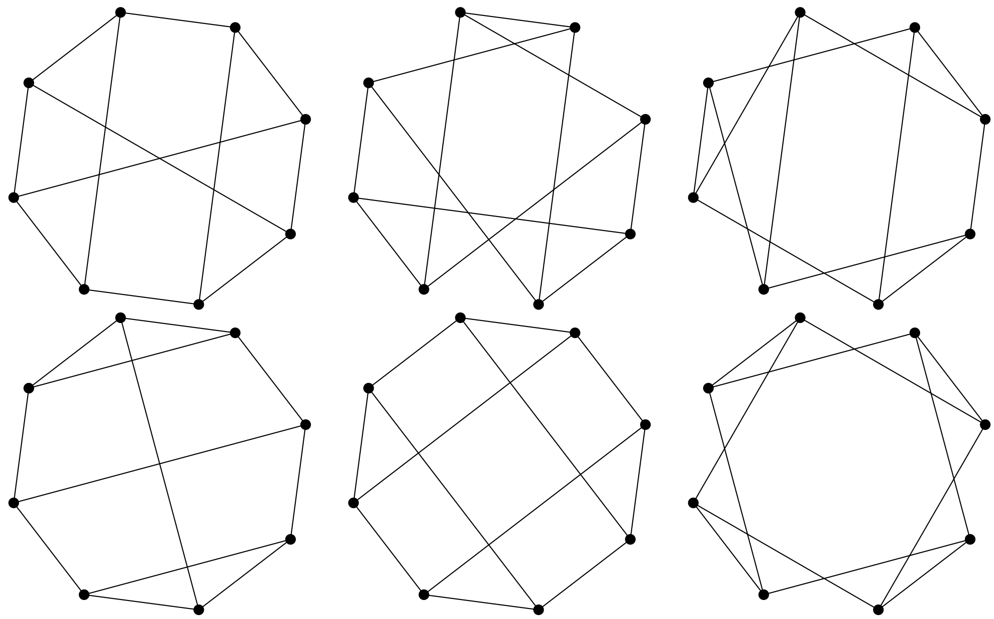
(a) Bestimme alle möglichen Gradfolgen eines Graphen mit vier Knoten (nicht-zusammenhängende Graphen miteingeschlossen).
(b) Ist es möglich, Graphen (ohne Schleifen und Mehrfachkanten) mit den folgenden Gradfolgen zu konstruieren?

(i)	$(3,3,3,3)$	(ii)	$(4,3,2,1)$
(iii)	$(3,3,3,2,1)$	(iv)	$(1,1,1,1,1)$

(c) Finde zwei zueinander nicht isomorphe Graphen mit der Gradfolge $(3,3,3,3,2,2)$.
(d) Zeige, daß die Gradfolge eines Graphen nicht aus lauter verschiedenen Zahlen bestehen kann, d.h., in jedem Graphen haben mindestens zwei Knoten den gleichen Grad.
NB: Schleifen sind nicht erlaubt.

(je 2P.)

Aufgabe 58. Zwei Graphen G_1 und G_2 heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V(G_1) \to V(G_2)$ zwischen beiden Knotenmengen gibt, sodaß $[x, y] \in E(G_1) \iff [f(x), f(y)] \in E(G_2)$. Isomorphe Graphen werden üblicherweise identifiziert. Die folgenden Bilder zeigen sechs Graphen, von denen jeweils zwei zueinander isomorph sind. Finde die drei isomorphen Paare.



(3P.)

Aufgabe 59. Ein Baum ist ein Graph ohne Kreise. Zeichne alle nicht isomorphen Bäume mit

(a) 6 Knoten
(b) 7 Knoten

(3P.)

Aufgabe 60. Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

und Kanten

$$E = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [3, 4], [3, 5], [3, 6], [4, 5], [4, 6], [5, 6]\}.$$

(a) Ist dieser Graph planar? Zusammenhängend? Wieviele Farben sind zur Färbung mindestens notwendig, wenn Nachbarknoten verschiedene Farben erhalten sollen?
(b) Bestimme die Adjazenzmatrix und die Anzahl der Wege der Länge 6 von Knoten 1 nach Knoten 6.

(2+2P.)

Aufgabe 61. Bestimme die erzeugende Funktion $w_{1,1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,1}^{(n)} z^n$ und eine Formel für die Anzahl der geschlossenen Wege mit Ausgangsknoten 1 für den gerichteten Graphen $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{[1 \to 2]\,,\ [2 \to 1]\,,\ [2 \to 3]\,,\ [3 \to 1]\,,\ [1 \to 3]\}$. (4P.)