Zunächst der bekannte euklidische Algorithmus.

a_i	1		1	-1
b_i		1	-1	2
q_i			1	1
	21	12	9	3

also $\mathrm{ggT}(21,12) = 3 = -21 + 2 \cdot 12$ und die Grundlösung der reduzierten Gleichung

$$12x + 21y = 3$$

lautet $(x_0, y_0) = (2, -1)$. Die rechte Seite der eigentlichen Gleichung ist $15 = 5 \cdot 3$, daher ist die Grundlösung der ursprünglichen Gleichung $(10, -5)$ und die gesuchten Lösungen sind

$$\begin{aligned}\{(10 + k \cdot \frac{21}{3}, -5 - k \cdot \frac{12}{3}) : k \in \mathbb{Z}\} &= \{(10 + k \cdot 7, -5 - k \cdot 4) : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\dots, (3,-1), (10,-5), (17,-9), \dots\}\end{aligned}$$

(6.5) Der chinesische Restsatz. Wir wollen nun ein "Gleichungssystem" von Kongruenzen lösen. Gegeben seien

$$\begin{aligned} m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N} \quad &\text{mit} \quad \mathrm{ggT}(m_i, m_j) = 1 \;\forall\; i \neq j \quad \text{"relativ prim"}, \\ c_1, \dots, c_s \in \mathbb{N} \quad &(\text{bzw. } \mathbb{Z})\,. \end{aligned}$$

Gesucht ist $x \in \mathbb{Z}$ (bzw. $\in \mathbb{N}$), sodaß

$$x \equiv c_i \mod m_i \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, s\,.$$

Zur Lösung setzen wir $m = m_1 \cdots m_s$. Wir stellen fest, daß $m/m_i \in \mathbb{N}$ und daß $\mathrm{ggT}(m_i, m/m_i) = 1$. Nach Satz 2.6 (vgl. Beispiel 2.7) können wir konstruktiv Zahlen $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ finden, sodaß

$$a_i \frac{m}{m_i} + b_i\, m_i = 1\,, \quad i = 1, \dots, s\,. \tag{6.6}$$

Daher ist

$$c_i\, a_i \frac{m}{m_i} = c_i - c_i\, b_i\, m_i \equiv c_i \;(m_i) \text{ und } c_i a_i \frac{m}{m_i} \equiv 0 \;(m_j) \;\forall\; j \neq i$$

Setzen wir also

$$x = \sum_{i=1}^{s} c_i\, a_i \frac{m}{m_i}\,, \tag{6.7}$$