und ebenso eine KNF als *Menge* von Klauseln. Damit kann man von Elementen einer Klausel und Elementen einer KNF sprechen. Die leere Klausel entspricht wegen (6.15) einer Kontradiktion; eine leere KNF entspricht hingegen einer Tautologie. Im folgenden werden wir nur **reduzierte** Klauseln betrachten, also solche, in denen jede Variable höchstens einmal vorkommt.

(7.1) Definition. Seien K_1 und K_2 Klauseln und ℓ ein Literal, sodaß $\ell \in K_1$ und $\neg\ell \in K_2$. Dann heißt

$$R(K_1, K_2) = (K_1 \setminus \{\ell\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg\ell\})$$

Resolvente von K_1 und K_2.

(7.2) Beispiel. Seien

$$\begin{aligned} K_1 &= A \vee B \vee \neg C \simeq \{A, B, \neg C\} \\ K_2 &= C \vee \neg D \simeq \{C, \neg D\} \end{aligned}$$

dann ist $\neg C \in K_1$, $C \in K_2$ und damit ist

$$\{A, B\} \cup \{\neg D\} = \{A, B, \neg D\} \simeq A \vee B \vee \neg D$$

eine Resolvente.

(7.3) Bemerkung. Es kann natürlich sein, daß es mehrere Resolventen gibt, wenn mehrere Literale die Bedingung erfüllen.

Das folgende Lemma ist die Grundlage des Resolutionskalküls:

(7.4) Lemma. *Wenn eine Belegung β zwei Klauseln K_1 und K_2 erfüllt, dann erfüllt sie auch jede Resolvente. Kurz:*

$$(\beta \models K_1 \wedge K_2) \implies (\beta \models R(K_1, K_2))$$

Beweis. Es sei $\ell \in K_1$ und $\neg\ell \in K_2$ und β ein Modell für $K_1 \wedge K_2$. Wir können also schreiben

$$K_1 = \tilde{K}_1 \vee \ell \qquad K_2 = \tilde{K}_2 \vee \neg\ell$$

wobei $\tilde{K}_1 = K_1 \setminus \{\ell\}$, $\tilde{K}_2 = K_2 \setminus \{\neg\ell\}$. Dann ist $R(K_1, K_2) = \tilde{K}_1 \vee \tilde{K}_2$ und wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $\beta \models \ell$, dann $\beta \not\models \neg\ell$ und wegen $\beta \models \tilde{K}_2 \vee \neg\ell$ gilt $\beta \models \tilde{K}_2$, und daher auch $\beta \models \tilde{K}_1 \vee \tilde{K}_2$.

Fall 2: $\beta \models \neg\ell$, dann $\beta \not\models \ell$ und wegen $\beta \models \tilde{K}_1 \vee \ell$ gilt $\beta \models \tilde{K}_1$, und daher auch $\beta \models \tilde{K}_1 \vee \tilde{K}_2$.

Da für jede Belegung β einer der beiden Fälle zutrifft, gilt in jedem Fall $\beta \models \tilde{K}_1 \vee \tilde{K}_2 = R(K_1, K_2)$. $\square$

(7.5) Folgerung. *Seien K_1 und K_2 Klauseln und R eine Resolvente, dann ist $K_1 \wedge K_2 \iff K_1 \wedge K_2 \wedge R$.*

Es ändert sich also semantisch nichts, wenn man zu einer KNF nach und nach Resolventen hinzufügt. Man kann zeigen, daß die Erfüllbarkeit einer Formel mit dem folgenden Algorithmus entschieden werden kann.

(7.6) Algorithmus. Es sei eine Formel P in KNF gegeben. Füge solange Resolventen hinzu, bis einer der folgenden Fälle eintritt:

(1) Die leere Klausel entsteht $\Longrightarrow$ P ist unerfüllbar wegen (6.15).

(2) Es können keine neuen Resolventen gefunden werden $\Longrightarrow$ P ist erfüllbar.

(7.7) Beispiel. Wir untersuchen, ob die Formel

$$P = (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (\neg B)$$

erfüllbar ist:

K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
				A	C	B
				$1 \Downarrow 2$	$3 \Downarrow 5$	$4 \Downarrow 6$
$A \vee B \vee C$	$\neg A \vee B \vee C$	$B \vee \neg C$	$\neg B$	$B \vee C$	B	$\perp$

nach drei Schritten entsteht die leere Klausel und daher ist die Formel unerfüllbar.

(7.8) Beispiel. Wir untersuchen, ob die Formel

$$P = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (B \vee C)$$