

Aufgabe 10. Zeige, daß die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen sind und bestimme die Äquivalenzklassen.

(a) $X = \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \sim (u, v) : \iff x - y = u - v$$

(b) $X = \mathbb{R}$,

$$x \sim y : \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe 11. Erstelle die Multiplikationstabellen von \mathbb{Z}_7 und \mathbb{Z}_8 .

Aufgabe 12. Für die *Internationale Standardbuchnummer* gibt es zwei Standards.

1. Die alte ISBN-10 hat 10 Ziffern,

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_{10},$$

wobei $x_1, x_2, \dots, x_9 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ und $x_{10} \in \{0, 1, \dots, 9\} \cup \{X\}$ wobei das Symbol X für den Wert 10 steht und die letzte Ziffer x_{10} eine Prüfziffer ist, sodaß

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 9x_9 + 10x_{10} \equiv 0 \pmod{11}$$

Beispiel: 3540257829

2. Die neue ISBN-13 hat 13 Ziffern,

$$z_1 z_2 z_3 z_4 \cdots z_{13},$$

wobei $z_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ und der Präfix $z_1 z_2 z_3$ entweder 978 oder 979 ist und die letzte Ziffer z_{13} eine Prüfziffer ist, die so gewählt wird, daß

$$z_1 + 3z_2 + z_3 + 3z_4 + \cdots + z_{11} + 3z_{12} + z_{13} \equiv 0 \pmod{10}$$

(gerade Stellen mit 3 multiplizieren) z.B. entspricht die obige ISBN-10 im neuen Standard der Nummer 978-3540257820.

(a) Berechne die Prüfziffern der folgenden unvollständigen ISBN

978-3-642-37971

364254273

(b) Erkläre, warum auch die Regel

$$10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + \cdots + 2x_9 + x_{10} \equiv 0 \pmod{11}$$

für die Überprüfung einer ISBN-10 verwendet werden kann.

Aufgabe 13. Zeige die *Elferprobe*: Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, d.h., mit der Ziffernentwicklung

$$n = \sum a_i 10^i$$

ist n durch 11 teilbar genau dann, wenn

$$\sum a_i (-1)^i$$

durch 11 teilbar ist.

Aufgabe 14. Berechne, wenn möglich, $[13]_{91}^{-1}$, $[15]_{91}^{-1}$ und $[16]_{91}^{-1}$.

Aufgabe 15. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $43 \equiv 1 \pmod{n}$?