

**Aufgabe 22.** Berechne  $2^{15} \bmod 3465$ .

*Hinweis:*

1. 3465 in Primfaktoren  $p_i^{k_i}$  zerlegen.
2.  $2^{15} \bmod p_i^{k_i}$  für alle Primfaktoren berechnen.
3. Die Lösung mit dem chinesischen Restsatz ermitteln.

**Aufgabe 23.** Welche der folgenden Strukturen  $(X, \circ)$  bilden Halbgruppen, Monoide, Gruppen? In welchen gilt das Kommutativgesetz?

- (a)  $(\mathbb{Q}, \circ)$  mit  $x \circ y = x + 2y$
- (b)  $(\mathbb{N}, \circ)$  mit  $x \circ y = \max(x, y)$ .
- (c)  $(\mathbb{N}, \circ)$  mit  $x \circ y = \min(x, y)$ .
- (d)  $(\mathbb{N}_0, \circ)$  mit  $x \circ y = |x - y|$ .
- (e)  $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$  mit  $x \circ y = x + y + xy$ .
- (f)  $A$  eine Menge,  $X = A^A = \{f : A \rightarrow A\}$  die Menge aller Funktionen von  $f : A \rightarrow A$  mit der Verknüpfung

$$f \circ g$$

(Hintereinanderausführung von Funktionen).

**Aufgabe 24.** Berechne  $\varphi(3465)$  und  $\varphi(10125000)$ .

**Aufgabe 25.** (a) Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe und  $x_0 \in G$ . Zeige, daß die Abbildung

$$f : G \rightarrow G$$

$$x \mapsto x_0 \circ x$$

bijektiv ist.

- (b) Folgere daraus, daß die Zahlen  $a, 2a, \dots, (p-1)a$  alle verschiedene Reste modulo  $p$  haben, wenn  $p$  eine Primzahl und  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$  ist.