Aufgabe 49. In der Fuzzy-Logik werden nicht nur die Wahrheitswerte 0 und 1, sondern beliebige Werte im Intervall $[0, 1]$ zugelassen. Eine Belegung ist daher eine Funktion $\beta : \mathcal{V} \rightarrow [0, 1]$; die logischen Operationen sind wie folgt definiert:

$$\beta(\neg A) = 1 - \beta(A) \quad \beta(A \wedge B) = \min(a, b) \quad \beta(A \vee B) = \max(a, b)$$

Zeige, daß die Regeln von de Morgan

$$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B) \quad \neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$$

auch für die Fuzzy-Logik gelten, d.h., dass links und rechts jeweils das gleiche Ergebnis herauskommt.

Aufgabe 50. Drücke folgende Aussagen über natürliche Zahlen mit Quantoren und den folgenden Symbolen aus: Konstante 0, Funktionssymbole S (einstellig), $+$ (zweistellig), $\cdot$ (zweistellig), mit der üblichen Interpretation in $\mathbb{N}_0$. (S ist die "Nachfolgerfunktion" $S(n) = n + 1$).

- (a) x ist gerade.
- (b) x ist ein Teiler von y .
- (c) x ist kongruent zu $y \pmod{z}$
- (d) x ist eine Potenz von 2. (Hinweis: welche Teiler hat x ?)
- (e) Eine Zahl x ist durch 6 teilbar genau dann, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 51. Bestimme die freien und gebundenen Variablen der Formel

$$(\forall z(Q(z) \wedge \forall x P(x, y))) \vee (\exists y P(x, y))$$

Aufgabe 52. Bringe folgende Formel auf Pränex-Normalform:

$$\forall x(\forall y \exists z(R(x, y, z)) \wedge \exists z \forall y \neg R(x, y, z))$$

Aufgabe 53. Welche der folgenden Schlüsse sind korrekt?

- (a) $\forall x \exists y R(x, y) \implies \exists x R(x, x)$
- (b) $\exists y \forall x R(x, y) \implies \exists x R(x, x)$
- (c) $(\forall x \exists y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))) \wedge \forall x \exists y R(x, y) \implies \forall x \forall y R(x, y)$