Lineare Algebra I, WS12/13

3. Aufgabenblatt, Termin: 17.10.2012

12. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{L}(\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}\}) = \mathbb{R}^2$?

13. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ sind Umterräume, welche (nur) affine Unterräume?

    (*Um Platz zu sparen, wird der Spaltenvektor* $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ *in der Form* $(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ *geschrieben.*)

    a) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 + x_2 = 0\}$
    b) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 + x_n = 1\}$
    c) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 \cdot x_2 = 0\}$
    d) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 0\}$
    e) $\{(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^2 + x_n^2 = 1\}$

    Veranschaulichen Sie diese Mengen für $n = 2$ graphisch.

14. Es seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Zeigen Sie, daß für alle $U, V \subseteq Y$ gilt:

    a) $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$, wenn zusätzlich $U \subseteq V$ gilt.
    b) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$
    c) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

15. Es seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Zeigen Sie, daß für alle $A, B \subseteq X$ gilt:

    a) $f(A) \subseteq f(B)$, wenn zusätzlich $A \subseteq B$ gilt.
    b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
    c) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

    Geben Sie ein Beipiel dafür, daß $f(A \cap B)$ eine echte Teilmenge von $f(A) \cap f(B)$ sein kann.

16. Es seien X, Y, Z Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y und $g\colon Y \to Z$ eine Abbildung von Y nach Z. Zeigen Sie, daß für alle Teilmengen A von X und K von Z gilt: $(g \circ f)(A) = g(f(A))$, $(g \circ f)^{-1}(K) = f^{-1}(g^{-1}(K))$.