Lineare Algebra I, WS12/13

4. Aufgabenblatt, Termin: 24.10.2012

17. Es sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X) := \{A \,|\, A \subseteq X\}$ ihre *Potenzmenge*. Die *charakteristische Funktion* $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$ einer Teilmenge A von X ist definiert durch $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A \\ 0, & \text{wenn } x \notin A. \end{cases}$ Zeigen Sie, daß $\chi\colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X := \{f \,|\, f\colon X \to \{0,1\}\}$, $\chi(A) := \chi_A$, bijektiv ist.

18. Für die Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gelte $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Zeigen Sie, daß g dann injektiv und f dann surjektiv ist.

19. Es sei $f\colon X \to Y$. Zeigen Sie:
    a) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ für alle $B \subseteq Y$, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ für alle $A \subseteq X$.
    b) f ist injektiv genau dann, wenn $A = f^{-1}(f(A))$ für alle $A \subseteq X$.
    c) f ist surjektiv genau dann, wenn $f(f^{-1}(B)) = B$ für alle $B \subseteq Y$.

20. Zeigen Sie: $G := \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ ist mit $\oplus\colon G \times G \to G$, $(a,b) \oplus (c,d) := (ac, ad+bc)$, eine abelsche Gruppe.

21. Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $\alpha_{a,b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\alpha_{a,b}(t) := at+b$. Zeigen Sie: $H := \{\alpha_{a,b} \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\}$ ist mit der Komposition von Funktionen $\circ$ eine nichtabelsche Gruppe.

22. Zeigen Sie: Ist $(G,\cdot)$ eine Gruppe, ist H eine Menge und ist $\tau\colon G \to H$ bijektiv, so ist H bezüglich $\odot\colon H \times H \to H$, $u \odot v := \tau(\tau^{-1}(u) \cdot \tau^{-1}(v))$ ebenfalls eine Gruppe.