Lineare Algebra I, WS12/13

6. Aufgabenblatt, Termin: 7.11.2012

28. Es sei K ein Körper und X eine Menge. Für $f, g \in K^X$ (K^X ist die Menge aller auf X definierten Abbildungen mit Werten in K) seien Summe $f+g$ und Produkt $f \cdot g$ punktweise erklärt: $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ und $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie: $(K^X, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring.

29. Es sei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Körper mit 2 Elementen. Abkürzend sei $0 := [0]$ und $1 := [1]$. Ferner sei X eine Menge. Dann ist (vgl. Aufgabe 17) $\sigma\colon K^X \to \mathcal{P}(X)$, $\sigma(f) := f^{-1}(\{1\})$, bijektiv. Analog zu Aufgabe 22 ergibt sich in Verbindung mit Aufgabe 28, daß $(\mathcal{P}(X), \oplus, \odot)$, wobei $A \oplus B := \sigma(\sigma^{-1}(A) + \sigma^{-1}(B))$ und $A \odot B := \sigma(\sigma^{-1}(A) \cdot \sigma^{-1}(B))$, ebenfalls ein kommutativer Ring ist. Beschreiben Sie für $A, B \subseteq X$ die Mengen $A \oplus B$ und $A \odot B$ explizit durch Vereinigungs-, Differenz- und Durchschnittsbildung.

30. Es sei $K := \{0, 1, a, b\}$ eine Menge mit vier Elementen. Ferner seien auf K zwei innere Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ gemäß folgender Tabellen gegeben:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Dann ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y, z) \in K^3$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} ax + by + z &= b \\ bx + ay + z &= a \\ ay + z &= b. \end{aligned}$$