Lineare Algebra I, WS12/13

7. Aufgabenblatt, Termin: 14.11.2012

31. Gesucht sind alle reellen Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3x_4 &= 1 \\ x_2x_4^2x_5 &= 100 \\ x_1x_3x_5 &= 10. \end{aligned}$$

Hinweis: Berechnen Sie dazu zuerst alle Lösungen, wenn alle $x_i > 0$ sind. (Dieser Fall führt nach Einführung geeigneter neuer Variablen auf ein lineares Gleichungssystem.) Finden Sie danach sämtliche möglichen Vorzeichenverteilungen $\operatorname{sgn}(x_i) = (-1)^{\sigma_i}$, $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, 5$, durch Berechnung der allgemeinen Lösung eines geeigneten homogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ in den Unbekannten $s_i := [\sigma_i]$, $i = 1, \dots, 5$.

32. Beweisen Sie: Das Produkt zweier Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist reell genau dann wenn es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß $z_1 = r\bar{z}_2$.

33. Berechnen Sie die Lösungsmenge des komplexen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (1-i)z_1 - z_2 + z_3 &= 2(1+i) \\ z_1 + iz_3 &= 3i \\ -z_1 + (1+i)z_2 - z_3 &= -i. \end{aligned}$$

34. Bestimmen Sie

$$\max_{z\in\mathbb{C},|z|\le 1} |1+z^2|, \qquad \min_{z\in\mathbb{C},|z|\le 1} |1+z^2|.$$

35. Skizzieren Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene:
    a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\bar{z} - 2| = \operatorname{Re}(z)\}$,
    b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| + |z + i| \ge 4\}$.