Lineare Algebra I, WS12/13

8. Aufgabenblatt, Termin: 21.11.2012

36. Geben Sie ein Beispiel eines Vektorraumes (über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), der die Vereinigung dreier *echter* Unterräume ist.

37. Es sei $\mathcal{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in sich über $\mathbb{R}$. Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen auf die Eigenschaft „Unterraum von $\mathcal{R}$“.
    a) $\{f \in \mathcal{R} \mid f(0) + f(1) = f(2)\}$,
    b) $\{f \in \mathcal{R} \mid |f(x)| \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$,
    c) $\{f \in \mathcal{R} \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in [0,1]\}$,
    d) $\{f \in \mathcal{R} \mid \text{es ex. ein } M > 0, \text{so daß } f(x) \geq 0 \text{ für alle } x > M\}$.

38. Es sei $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_3 = 0\}$. Dann ist U ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine endliche Menge M, so daß $U = \mathcal{L}(M)$.

39. Untersuchen sie die folgenden Tupel von Vektoren des K^4 auf ihre lineare Unabhängigkeit:
    a) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ mit $K = \mathbb{R}$,
    b) $\left(\begin{pmatrix}3\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ mit $K = \mathbb{R}$,
    c) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}\right)$ mit $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $p \geq 3$ prim.

40. Es sei (wieder) $\mathcal{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha \in \mathcal{R}$ definiert durch $f_\alpha(x) := |x - \alpha| + (x - \alpha)$. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle α_i mit $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ daß n-Tupel $(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \ldots, f_{\alpha_n})$ linear unabhängig ist.