Lineare Algebra I, WS12/13

9. Aufgabenblatt, Termin: 5.12.2012

41. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Ist $(b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V, dann ist auch $(c_1, c_2, ..., c_n)$ mit $c_i = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} b_k + b_i$, $i = 1, ..., n$, $\lambda_{ik} \in \mathbb{K}$, eine Basis von V.

42. Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \ d = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^5$ über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathcal{L}(\{a, b\}) \cap \mathcal{L}(\{c, d, e\})$ und eine von $\mathcal{L}(\{a, b, c\}) \cap \mathcal{L}(\{d, e\})$.

43. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f(x) := Ax$, und $b_1, ..., b_m \in \mathbb{K}^n$.

   a) Sei $(b_1, ..., b_m)$ linear unabhängig. Zeigen Sie:
   $f|_{\mathcal{L}(\{b_1,...,b_m\})}$ ist injektiv genau dann, wenn $(f(b_1), ..., f(b_m))$ linear unabhängig ist.

   b) Sei $\{b_1, ..., b_m\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie:
   f ist surjektiv genau dann, wenn $\{f(b_1), ..., f(b_m)\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{K}^n$ ist.

44. Bestimmen Sie je eine Basis für den Spaltenraum, den Zeilenraum und den Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 14 & 4 & -12 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}.$$

45. Es sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(x) := Ax$, und U, V Teilmengen von $\mathbb{K}^n$. Beweisen Sie: $f(U) = f(V)$ genau dann, wenn $U + \ker(A) = V + \ker(A)$.