**Lineare Algebra I, WS12/13**
10. Aufgabenblatt, Termin: 12.12.2012

46. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Es sei $(A \quad b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ und $(Z \quad c)$ eine zugehörige Zeilenstufenform. Dann ist (leicht) zu sehen, daß alle Komponenten von $c$ Linearkombinationen der Komponenten von $b$ sind.
Zeigen Sie: Es existiert ein $l \in \mathbb{N}$ und ein $B \in \mathbb{K}^{l\times n}$, so daß $\ker(B) = \operatorname{rg}(A)$.

47. (Fortsetzung des vorigen Beispiels) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{7\times 4}$. Dann ist der Spaltenraum $C$ von $A$ ein *linearer Code*. Finden Sie ein $l$ und eine Matrix $B$ wie im obigen Beispiel. ($B$ heißt dann *Kontrollmatrix* für $C$.)

48. Es seien $V$ und $W$ beliebige Vektorräume über $\mathbb{Q}$ und es sei $f\colon V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus bezüglich der Addition in $V$ und $W$. Zeigen Sie, daß $f$ dann sogar $\mathbb{Q}$-linear ist.

49. Es sei $K$ wie in Beispiel 30. Dann ist $K = K^1$ ein Vektorraum über $K$ und insbesondere eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition in $K$. Untersuchen Sie, ob es Gruppenhomomorphismen $f\colon K \to K$ gibt, die *nicht* $K$-linear sind.

50. Es sei $K$ der im Skriptum im Beispiel 2.4.9 konstruierte Körper. Dann ist wie im vorigen Beispiel $K = K^1$ ein Vektorraum über $K$ und insbesondere eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition in $K$. Untersuchen Sie, ob es Gruppenhomomorphismen $f\colon K \to K$ gibt, die *nicht* $K$-linear sind.

51. Es sei $V := \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$. Dann ist für alle $0 \le \tau \le 1$ die Abbildung $\pi_\tau\colon V \to \mathbb{R}$, $\pi_\tau(f) := f(\tau)$, linear. Ebenso ist $I\colon V \to \mathbb{R}$, $I(f) := \int_0^1 f(t)dt$, linear. Zeigen Sie $I \notin \mathcal{P} := \mathcal{L}(\{\pi_\tau \mid \tau \in [0,1]\})$.
(Sie benötigen nur elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals stetiger Funktionen.)