Lineare Algebra I, WS12/13

11. Aufgabenblatt, Termin: 19.12.2012

52. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & V = f(V) + \ker(f) \\ \text{(ii)} & f(V) \cap \ker(f) = \{0\} \\ \text{(iii)} & \ker(f \circ f) = \ker(f). \end{array}$$

53. Es seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume, $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Beweisen Sie

$$\dim((g \circ f)(U)) \leq \min\{\dim(f(U)), \dim(g(V))\}.$$

54. Es seien a_1, a_2, a_3, a_4 die Spaltenvektoren der Matrix $A \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{7\times 4}$ aus Übung 47. Zeigen Sie, daß das Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) linear unabhängig ist und bestimmen Sie a_5, a_6, a_7 so, daß $(a_1, \dots, a_7)$ eine Basis des Vektorraums $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ ist.

55. Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b & a-b \\ 3+b & 2 & a+b & 3-a \\ -b & -1 & -3 & 3-b \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

56. Es sei

$$U = \mathcal{L}(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}) \subseteq \mathbb{R}^4.$$

(a) Finden Sie einen Teilraum $W \subseteq \mathbb{R}^4$ so, daß die Summe $\mathbb{R}^4 = U + W$ direkt ist und zerlegen Sie den Vektor $x = (1, 0, 1, 0)^\top$ in $x = u + w$ mit $u \in U$, $w \in W$.

(b) Finden Sie eine Abbildung $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ mit der Eigenschaft $\varphi \circ \varphi = \varphi$ so, daß $\mathrm{rg}(\varphi) = U$ und $\ker(\varphi) = W$ ist.