Lineare Algebra I, WS12/13

12. Aufgabenblatt, Termin: 9.1.2013

57. Gegeben sind die Matrizen $A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, wobei alle Matrizen als reelle Matrizen aufzufassen sind.

    a) Berechnen Sie alle Produkte $A_i \cdot A_j$, $1 \leq i, j \leq 3$, die möglich sind.

    b) Zeigen Sie, daß A_2 invertierbar ist, und berechnen Sie A_2^{-1}.

58. Es sei $W := \{(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}\}$ und
$V := \{a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in W \mid$ es gibt ein $i_a \in \mathbb{N}$ mit $a_i = 0$ für alle $i \geq i_a\}$.
Dann ist V ein Unterraum von W. Für $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in V$ (mit $a_i = 0$ für alle $i > i_a$ mit einem geeigneten $i_a \in \mathbb{N}$) und $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in W$ sei $\varphi(\alpha, a) := \sum_{i=1}^{i_a} \alpha_i a_i$. Zeigen Sie, daß die Zuordnung $\alpha \mapsto (a \mapsto \varphi(\alpha, a))$ einen Isomorphismus zwischen W und $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ bildet.

59. Weisen Sie nach, daß $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist (Pauli-Matrizen).

60. Es sei K ein Körper, es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$. Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei A^m wie in der Vorlesung definiert ($A^0 = E_n$, $A^{m+1} = A \cdot A^m$). Zeigen Sie:

    a) $A^{m+1} = A^m \cdot A$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

    b) $A^{m+k} = A^m \cdot A^k$ für alle $m, k \in \mathbb{N}_0$.

61. Berechnen Sie für alle $m \in \mathbb{N}_0$ die Potenzen A^m der Matrix $A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, daß A invertierbar ist, und bestimmen Sie A^{-1}.

62. Bestimmen Sie eine Menge M, eine innere Verknüpfung $*$ in dieser Menge und Elemente $e, a \in M$, so daß $e * b = b * e = b$ für alle $b \in M$ und so daß $a * (a * a)$ („a^3“) von $(a * a) * a$ („$a^2 * a$“) verschieden ist.