Lineare Algebra I, WS12/13
14. Aufgabenblatt, Termin: 23.1.2013

68. Die Vektoren $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4$ des Vektorraums $V := \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix}1\\4\\5\\5\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}1\\4\\7\\4\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\\8\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie Indizes $1 \leq i < j \leq 4$, so daß (a_1, a_2, b_i, b_j) eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist.

b) Zeigen Sie, daß V die direkte Summe der Unterräume $U := \mathcal{L}(\{a_1, a_2\})$ und $W := \mathcal{L}(\{b_i, b_j\})$ ist und berechnen Sie die Matrix der durch $x \mapsto w \in W$ gegebenen linearen Abbildung von V nach V. (Dabei ist w die in W liegende *Komponente* von x: Es ist also $x = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$.)

69. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Relation

$$A \simeq B \;:\Leftrightarrow\; A \text{ und } B \text{ sind äquivalente Matrizen}$$

ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{m\times n}$. Zeigen Sie weiters, daß $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$,

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 3 & 1\\0 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & -2 & 4\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\3 & 0 & -2 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

äquivalent sind und bestimmen Sie reguläre Matrizen S und T, sodaß $B = S^{-1}AT$.

70. Gibt es einen Endomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und zwei Basen von $\mathbb{R}^2$, sodaß

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

die Matrizen von f bezüglich dieser Basen sind? Falls ja, geben Sie solche Basen explizit an und beschreiben Sie anhand einer Skizze die Aktion von f geometrisch.

71. Es sei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $V := K^4$ und

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \mid x_1 + x_2 = 0, x_1 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

a) Bestimmen Sie $\dim(U)$, $\dim(V/U)$ und die Mächtigkeiten von U und von V/U.
b) Geben Sie alle Elemente von U und von V/U explizit an.

72. Gegeben ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f((x_1, x_2, x_3)^\top) := (2_1 + 3x_2, x_2 + 2x_3)^\top.$$

Bestimmen Sie $\ker(f)$, $\operatorname{rg}(f)$ und geben Sie einen Isomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^3/\ker(f) \to \operatorname{rg}(f)$ an. Drücken Sie für alle $(y_1, y_2)^\top \in \operatorname{rg}(f)$ das Urbild $f^{-1}(\{(y_1, y_2)^\top\})$ als Funktionswert einer unter Verwendung von Φ auf $\mathbb{R}^2$ definierten Abbildung aus.