Anzahl der
Aufgabenblätter: 13
8. Jänner 2013

Lineare Algebra I, WS12/13

1. Aufgabenblatt, Termin: 3.10.2012

1. Es seien a, b, c reelle Zahlen, so daß die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x + y = 1 \text{ und } ax + by = c\}$ leer ist. Was bedeutet das für die Zahlen a, b, c?

2. Vom Parallelogramm $ABCD$ ist bekannt, daß $A = (1, 1), B = (2, 6), D = (5, 3)$. Bestimmen Sie C.

3. Ist das Viereck $ABCD$, $A = (3, 2), B = (5, 6), C = (15, 8), D = (18, 7)$, ein Trapez?

4. Es sei $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ und $C = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_0 > 0$. Zeigen Sie, daß die Schwerlinien des Dreiecks ABC einen Punkt gemeinsam haben.

5. Es sei $g := \{(1, 2) + t(3, 4) \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y - z = 6\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
   a) Finden Sie reelle Zahlen a, b, c , so daß $g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, ax + by = c\}$.
   b) Bestimmen Sie Punkte P_1, P_2, P_3 des $\mathbb{R}^3$, so daß $E = \{P_1 + sP_2 + tP_3 \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$

Lineare Algebra I, WS12/13

2. Aufgabenblatt, Termin: 10.10.2012

6. Bestimmen Sie $E \cap g$ für $g = \{(-2,0,1) + t(1,3,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 2y + z = 5\}$.

7. Es sei $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 5z = 10\}$ und $G = \{(2,1,2) + t(0,5,2) + s(1,1,0) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$. Berechnen Sie $E \cap G$.

8. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 - 8x_4 + 2x_5 &= -8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= -2 \end{aligned}$$

   mit Gaußscher Elimination.

9. Berechnen Sie für alle Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -ax + y + z &= 1 \\ 3x + 3y + 2(1-2a)z &= 9 \\ x + y - az &= 1. \end{aligned}$$

10. Berechnen Sie die Lösungsmenge des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (u_1 - u_3)u_2 + 2u_1u_3 &= 10 \\ 10u_1^{-1} + u_2 - 2u_3 &= 0 \\ 2u_1u_2 - u_2u_3 + u_1u_3 &= 4. \end{aligned}$$

11. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -1 \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} &= 0, \quad i = 2, ..., n-1, \\ -x_{n-1} + ax_n &= b \end{aligned}$$

   in $\mathbb{R}^n$ keine bzw. genau eine bzw. unendlich viele Lösungen?

Lineare Algebra I, WS12/13

3. Aufgabenblatt, Termin: 17.10.2012

12. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{L}(\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}\}) = \mathbb{R}^2$?

13. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ sind Umterräume, welche (nur) affine Unterräume?

    (*Um Platz zu sparen, wird der Spaltenvektor* $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ *in der Form* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ *geschrieben.*)

    a) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 = 0\}$
    b) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_n = 1\}$
    c) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$
    d) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\}$
    e) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_n^2 = 1\}$

    Veranschaulichen Sie diese Mengen für $n = 2$ graphisch.

14. Es seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Zeigen Sie, daß für alle $U, V \subseteq Y$ gilt:

    a) $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$, wenn zusätzlich $U \subseteq V$ gilt.
    b) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$
    c) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

15. Es seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Zeigen Sie, daß für alle $A, B \subseteq X$ gilt:

    a) $f(A) \subseteq f(B)$, wenn zusätzlich $A \subseteq B$ gilt.
    b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
    c) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

    Geben Sie ein Beipiel dafür, daß $f(A \cap B)$ eine echte Teilmenge von $f(A) \cap f(B)$ sein kann.

16. Es seien X, Y, Z Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y und $g\colon Y \to Z$ eine Abbildung von Y nach Z. Zeigen Sie, daß für alle Teilmengen A von X und K von Z gilt: $(g \circ f)(A) = g(f(A))$, $(g \circ f)^{-1}(K) = f^{-1}(g^{-1}(K))$.

Lineare Algebra I, WS12/13

4. Aufgabenblatt, Termin: 24.10.2012

17. Es sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subseteq X\}$ ihre *Potenzmenge*. Die *charakteristische Funktion* $\chi_A \colon X \to \{0,1\}$ einer Teilmenge A von X ist definiert durch $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A \\ 0, & \text{wenn } x \notin A. \end{cases}$ Zeigen Sie, daß $\chi \colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X := \{f \mid f \colon X \to \{0,1\}\}$, $\chi(A) := \chi_A$, bijektiv ist.

18. Für die Abbildungen $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to X$ gelte $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Zeigen Sie, daß g dann injektiv und f dann surjektiv ist.

19. Es sei $f \colon X \to Y$. Zeigen Sie:
    a) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ für alle $B \subseteq Y$, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ für alle $A \subseteq X$.
    b) f ist injektiv genau dann, wenn $A = f^{-1}(f(A))$ für alle $A \subseteq X$.
    c) f ist surjektiv genau dann, wenn $f(f^{-1}(B)) = B$ für alle $B \subseteq Y$.

20. Zeigen Sie: $G := \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ ist mit $\oplus \colon G \times G \to G$, $(a,b) \oplus (c,d) := (ac, ad+bc)$, eine abelsche Gruppe.

21. Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $\alpha_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\alpha_{a,b}(t) := at+b$. Zeigen Sie: $H := \{\alpha_{a,b} \mid (a,b) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\}$ ist mit der Komposition von Funktionen $\circ$ eine nichtabelsche Gruppe.

22. Zeigen Sie: Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, ist H eine Menge und ist $\tau \colon G \to H$ bijektiv, so ist H bezüglich $\odot \colon H \times H \to H$, $u \odot v := \tau(\tau^{-1}(u) \cdot \tau^{-1}(v))$ ebenfalls eine Gruppe.

Lineare Algebra I, WS12/13

5. Aufgabenblatt, Termin: 31.10.2012

23. Zeigen Sie: Eine Gruppe G ist abelsch genau dann, wenn die Abbildung $f : G \to G$, $f(x) = x^{-1}$ (inverses Element zu x), ein Homomorphismus ist.

24. Seien $(G, \cdot)$, $(H, *)$ Gruppen und $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie: ϕ ist ein Gruppenisomorphismus genau dann, wenn $H = \phi(G)$ und $\operatorname{Ker}\phi := \{x \in G \mid \phi(x) = e_H\} = \{e_G\}$.

25. Beweisen Sie: $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) \simeq ((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}, \cdot)$.

26. a) Gilt $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}, \cdot) \simeq D$ (Gruppe der Drehungen um Vielfache von $\pi/2$)? Falls ja, geben Sie einen Gruppenisomorphismus an.
    b) Gilt $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}, \cdot) \simeq R$ (Gruppe der Deckbewegungen des Rechtecks)? Falls ja, geben Sie einen Gruppenisomorphismus an.

27. Seien $(G, \cdot)$, $(H, *)$ Gruppen und $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, daß $\operatorname{Ker}\phi$ eine Untergruppe von G und $\phi(G)$ eine Untergruppe von H ist.

Lineare Algebra I, WS12/13

6. Aufgabenblatt, Termin: 7.11.2012

28. Es sei K ein Körper und X eine Menge. Für $f, g \in K^X$ (K^X ist die Menge aller auf X definierten Abbildungen mit Werten in K) seien Summe $f+g$ und Produkt $f \cdot g$ punktweise erklärt: $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ und $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie: $(K^X, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring.

29. Es sei $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Körper mit 2 Elementen. Abkürzend sei $0 := [0]$ und $1 := [1]$. Ferner sei X eine Menge. Dann ist (vgl. Aufgabe 17) $\sigma\colon K^X \to \mathcal{P}(X)$, $\sigma(f) := f^{-1}(\{1\})$, bijektiv. Analog zu Aufgabe 22 ergibt sich in Verbindung mit Aufgabe 28, daß $(\mathcal{P}(X), \oplus, \odot)$, wobei $A \oplus B := \sigma(\sigma^{-1}(A) + \sigma^{-1}(B))$ und $A \odot B := \sigma(\sigma^{-1}(A) \cdot \sigma^{-1}(B))$, ebenfalls ein kommutativer Ring ist. Beschreiben Sie für $A, B \subseteq X$ die Mengen $A \oplus B$ und $A \odot B$ explizit durch Vereinigungs-, Differenz- und Durchschnittsbildung.

30. Es sei $K := \{0, 1, a, b\}$ eine Menge mit vier Elementen. Ferner seien auf K zwei innere Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ gemäß folgender Tabellen gegeben:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Dann ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y, z) \in K^3$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} ax + by + z &= b \\ bx + ay + z &= a \\ ay + z &= b. \end{aligned}$$

Lineare Algebra I, WS12/13

7. Aufgabenblatt, Termin: 14.11.2012

31. Gesucht sind alle reellen Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3x_4 &= 1 \\ x_2x_4^2x_5 &= 100 \\ x_1x_3x_5 &= 10. \end{aligned}$$

Hinweis: Berechnen Sie dazu zuerst alle Lösungen, wenn alle $x_i > 0$ sind. (Dieser Fall führt nach Einführung geeigneter neuer Variablen auf ein lineares Gleichungssystem.) Finden Sie danach sämtliche möglichen Vorzeichenverteilungen $\operatorname{sgn}(x_i) = (-1)^{\sigma_i}$, $\sigma_i \in \{0,1\}$, $i = 1, \ldots, 5$, durch Berechnung der allgemeinen Lösung eines geeigneten homogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ in den Unbekannten $s_i := [\sigma_i]$, $i = 1, \ldots, 5$.

32. Beweisen Sie: Das Produkt zweier Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist reell genau dann wenn es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß $z_1 = r\bar{z}_2$.

33. Berechnen Sie die Lösungsmenge des komplexen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (1-i)z_1 - z_2 + z_3 &= 2(1+i) \\ z_1 + iz_3 &= 3i \\ -z_1 + (1+i)z_2 - z_3 &= -i. \end{aligned}$$

34. Bestimmen Sie

$$\max_{z\in\mathbb{C},|z|\le 1} |1+z^2|, \qquad \min_{z\in\mathbb{C},|z|\le 1} |1+z^2|.$$

35. Skizzieren Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene:
    a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |\bar{z} - 2| = \operatorname{Re}(z)\}$,
    b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| + |z+i| \ge 4\}$.

Lineare Algebra I, WS12/13

8. Aufgabenblatt, Termin: 21.11.2012

36. Geben Sie ein Beispiel eines Vektorraumes (über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), der die Vereinigung dreier *echter* Unterräume ist.

37. Es sei $\mathcal{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in sich über $\mathbb{R}$. Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen auf die Eigenschaft „Unterraum von $\mathcal{R}$".

    a) $\{f \in \mathcal{R} \mid f(0) + f(1) = f(2)\}$,

    b) $\{f \in \mathcal{R} \mid |f(x)| \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$,

    c) $\{f \in \mathcal{R} \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in [0,1]\}$,

    d) $\{f \in \mathcal{R} \mid \text{es ex. ein } M > 0, \text{so daß } f(x) \geq 0 \text{ für alle } x > M\}$.

38. Es sei $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_3 = 0\}$. Dann ist U ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine endliche Menge M, so daß $U = \mathcal{L}(M)$.

39. Untersuchen sie die folgenden Tupel von Vektoren des K^4 auf ihre lineare Unabhängigkeit:

    a) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ mit $K = \mathbb{R}$,

    b) $\left(\begin{pmatrix}3\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ mit $K = \mathbb{R}$,

    c) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}\right)$ mit $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $p \geq 3$ prim.

40. Es sei (wieder) $\mathcal{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha \in \mathcal{R}$ definiert durch $f_\alpha(x) := |x - \alpha| + (x - \alpha)$. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle α_i mit $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ daß n-Tupel $(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \ldots, f_{\alpha_n})$ linear unabhängig ist.

Lineare Algebra I, WS12/13

9. Aufgabenblatt, Termin: 5.12.2012

41. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Ist $(b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V, dann ist auch $(c_1, c_2, ..., c_n)$ mit $c_i = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} b_k + b_i$, $i = 1, ..., n$, $\lambda_{ik} \in \mathbb{K}$, eine Basis von V.

42. Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \; d = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^5$ über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathcal{L}(\{a, b\}) \cap \mathcal{L}(\{c, d, e\})$ und eine von $\mathcal{L}(\{a, b, c\}) \cap \mathcal{L}(\{d, e\})$.

43. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f(x) := Ax$, und $b_1, ..., b_m \in \mathbb{K}^n$.
    a) Sei $(b_1, ..., b_m)$ linear unabhängig. Zeigen Sie:
    $f|_{\mathcal{L}(\{b_1, ..., b_m\})}$ ist injektiv genau dann, wenn $(f(b_1), ..., f(b_m))$ linear unabhängig ist.
    b) Sei $\{b_1, ..., b_m\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie:
    f ist surjektiv genau dann, wenn $\{f(b_1), ..., f(b_m)\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{K}^n$ ist.

44. Bestimmen Sie je eine Basis für den Spaltenraum, den Zeilenraum und den Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 14 & 4 & -12 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}.$$

45. Es sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(x) := Ax$, und U, V Teilmengen von $\mathbb{K}^n$. Beweisen Sie: $f(U) = f(V)$ genau dann, wenn $U + \ker(A) = V + \ker(A)$.

Lineare Algebra I, WS12/13

10. Aufgabenblatt, Termin: 12.12.2012

46. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Es sei $(A \quad b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ und $(Z \quad c)$ eine zugehörige Zeilenstufenform. Dann ist (leicht) zu sehen, daß alle Komponenten von c Linearkombinationen der Komponenten von b sind.
Zeigen Sie: Es existiert ein $l \in \mathbb{N}$ und ein $B \in \mathbb{K}^{l\times n}$, so daß $\ker(B) = \operatorname{rg}(A)$.

47. (Fortsetzung des vorigen Beispiels) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{7\times 4}$. Dann ist der Spaltenraum C von A ein *linearer Code*. Finden Sie ein l und eine Matrix B wie im obigen Beispiel. (B heißt dann *Kontrollmatrix* für C.)

48. Es seien V und W beliebige Vektorräume über $\mathbb{Q}$ und es sei $f\colon V \to W$ ein Gruppenhomomorphismus bezüglich der Addition in V und W. Zeigen Sie, daß f dann sogar $\mathbb{Q}$-linear ist.

49. Es sei K wie in Beispiel 30. Dann ist $K = K^1$ ein Vektorraum über K und insbesondere eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition in K. Untersuchen Sie, ob es Gruppenhomomorphismen $f\colon K \to K$ gibt, die *nicht* K-linear sind.

50. Es sei K der im Skriptum im Beispiel 2.4.9 konstruierte Körper. Dann ist wie im vorigen Beispiel $K = K^1$ ein Vektorraum über K und insbesondere eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition in K. Untersuchen Sie, ob es Gruppenhomomorphismen $f\colon K \to K$ gibt, die *nicht* K-linear sind.

51. Es sei $V := \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$. Dann ist für alle $0 \le \tau \le 1$ die Abbildung $\pi_\tau\colon V \to \mathbb{R}$, $\pi_\tau(f) := f(\tau)$, linear. Ebenso ist $I\colon V \to \mathbb{R}$, $I(f) := \int_0^1 f(t)dt$, linear. Zeigen Sie $I \notin \mathcal{P} := \mathcal{L}(\{\pi_\tau \mid \tau \in [0,1]\})$.
(Sie benötigen nur elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals stetiger Funktionen.)

Lineare Algebra I, WS12/13

11. Aufgabenblatt, Termin: 19.12.2012

52. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f \in \operatorname{Hom}(V, V)$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & V = f(V) + \ker(f) \\ \text{(ii)} & f(V) \cap \ker(f) = \{0\} \\ \text{(iii)} & \ker(f \circ f) = \ker(f). \end{array}$$

53. Es seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume, $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$, $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Beweisen Sie

$$\dim((g \circ f)(U)) \leq \min\{\dim(f(U)), \dim(g(V))\}.$$

54. Es seien a_1, a_2, a_3, a_4 die Spaltenvektoren der Matrix $A \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{7\times 4}$ aus Übung 47. Zeigen Sie, daß das Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) linear unabhängig ist und bestimmen Sie a_5, a_6, a_7 so, daß $(a_1, ..., a_7)$ eine Basis des Vektorraums $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ ist.

55. Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b & a-b \\ 3+b & 2 & a+b & 3-a \\ -b & -1 & -3 & 3-b \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

56. Es sei

$$U = \mathcal{L}(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}) \subseteq \mathbb{R}^4.$$

(a) Finden Sie einen Teilraum $W \subseteq \mathbb{R}^4$ so, daß die Summe $\mathbb{R}^4 = U + W$ direkt ist und zerlegen Sie den Vektor $x = (1, 0, 1, 0)^\top$ in $x = u + w$ mit $u \in U$, $w \in W$.

(b) Finden Sie eine Abbildung $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ mit der Eigenschaft $\varphi \circ \varphi = \varphi$ so, daß $\operatorname{rg}(\varphi) = U$ und $\ker(\varphi) = W$ ist.

Lineare Algebra I, WS12/13

12. Aufgabenblatt, Termin: 9.1.2013

57. Gegeben sind die Matrizen $A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, wobei alle Matrizen als reelle Matrizen aufzufassen sind.

    a) Berechnen Sie alle Produkte $A_i \cdot A_j$, $1 \le i, j \le 3$, die möglich sind.

    b) Zeigen Sie, daß A_2 invertierbar ist, und berechnen Sie A_2^{-1}.

58. Es sei $W := \{(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}\}$ und
$V := \{a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in W \mid$ es gibt ein $i_a \in \mathbb{N}$ mit $a_i = 0$ für alle $i \ge i_a\}$.
Dann ist V ein Unterraum von W. Für $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in V$ (mit $a_i = 0$ für alle $i > i_a$ mit einem geeigneten $i_a \in \mathbb{N}$) und $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in W$ sei $\varphi(\alpha, a) := \sum_{i=1}^{i_a} \alpha_i a_i$. Zeigen Sie, daß die Zuordnung $\alpha \mapsto (a \mapsto \varphi(\alpha, a))$ einen Isomorphismus zwischen W und $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ bildet.

59. Weisen Sie nach, daß $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist (Pauli-Matrizen).

60. Es sei K ein Körper, es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$. Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei A^m wie in der Vorlesung definiert ($A^0 = E_n$, $A^{m+1} = A \cdot A^m$). Zeigen Sie:

    a) $A^{m+1} = A^m \cdot A$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

    b) $A^{m+k} = A^m \cdot A^k$ für alle $m, k \in \mathbb{N}_0$.

61. Berechnen Sie für alle $m \in \mathbb{N}_0$ die Potenzen A^m der Matrix $A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, daß A invertierbar ist, und bestimmen Sie A^{-1}.

62. Bestimmen Sie eine Menge M, eine innere Verknüpfung $*$ in dieser Menge und Elemente $e, a \in M$, so daß $e * b = b * e = b$ für alle $b \in M$ und so daß $a * (a * a)$ („a^3“) von $(a * a) * a$ („$a^2 * a$“) verschieden ist.

Lineare Algebra I, WS12/13

13. Aufgabenblatt, Termin: 16.1.2013

63. Weisen Sie nach, daß $S = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist und berechnen Sie T_S^P, T_P^S, wobei P die Basis des $\mathbb{C}^{2\times 2}$ aus Übung 59 ist.

64. Es sei K ein Körper, es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und es sei $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ eine $(n+1)$-elementige Teilmenge von K. Zeigen Sie (z. B. durch Induktion und unter Verwendung der Formel $a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1})$, daß für alle $K \supseteq S \supseteq T$ und die Abbildungen $S \ni t \mapsto \pi_i(t) := t^i \in K$ gilt: $(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ ist linear unabhängig im Vektorraum K^S.

65. (Bezeichnungen wie in der vorigen Aufgabe) Es sei $K = S = \mathbb{R}$ und $\mathcal{P}_n := \mathcal{L}(\{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n\})$. Ferner sei $\nu_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definiert durch $\nu_i(t) := \prod_{j=0}^{i-1}(t-j)$, wobei also $\nu_0 = \pi_0 \equiv 1$.
    a) Zeigen Sie: $B_n := (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ und $C_n := (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ sind Basen von $\mathcal{P}_n$.
    b) Bestimmen Sie die Matrizen $T_{C_3}^{B_3}$ und $T_{B_3}^{C_3}$.

66. (Bezeichnungen wie in der vorigen Aufgabe) Es sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen, $n \in \mathbb{N}_0$, und $t_0, t_1, ..., t_n$ paarweise verschiedene Elemente aus K. Zeigen Sie: Zu jedem $(y_0, y_1, ..., y_n)^\top \in K^{n+1}$ existiert genau ein $p \in \mathcal{P}_n$, sodaß $p(t_i) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

67. Wegen Punkt a) aus Übung 65 gibt es genau eine lineare Abbildung $\partial_n \colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ mit $\partial_n(\pi_0) = 0$ und $\partial_n(\pi_i) = i\pi_{i-1}$ für $1 \le i \le n$. Bestimmen Sie $M_{B_n}^{B_n}(\partial_n)$ und $M_{C_3}^{C_3}(\partial_3)$.