Aufgabe 12. Überprüfe die folgenden Relationen auf die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität, Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation, Totalordnung und bestimme ggf. die Äquivalenzklassen.

(a) $X = \mathcal{P}(Y)$, wobei Y eine fixe Menge ist, Relation $xRy :\iff x \subseteq y$.
(b) $X = \mathbb{R}^2$, Relation $(x_1, x_2)R(y_1, y_2) :\iff x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$.
(c) $X = \mathbb{N}$, $R = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
(d) $X = \mathbb{Z}$, Relation $mRn :\iff m - n$ ungerade.

Aufgabe 13. Eine Partition einer Menge X wurde definiert als eine Teilmenge $Z \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ mit den Eigenschaften

(i)
$$\bigcup_{A \in Z} A = X$$

(ii)
$$\bigwedge_{A,B \in Z} (A \neq B \implies A \cap B = \emptyset)$$

(a) Zeige, daß eine Teilmenge $Z \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Partition ist genau dann, wenn gilt

$$\bigwedge_{x \in X} \dot{\bigvee_{A \in Z}} x \in A$$

(b) Sei $Z \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ eine Partition einer Menge X. Zeige, daß durch

$$x \sim y :\iff \bigvee_{A \in Z} x \in A \wedge y \in A$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert wird sodaß $X/_{\sim} = Z$.

Aufgabe 14. Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{(1, 3), (4, 3)\} \subseteq A \times A$. Bestimme die kleinste Äquivalenzrelation auf A, die B umfaßt und gib die zugehörigen Äquivalenzklassen an.

Aufgabe 15. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeige oder widerlege:

(a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle $A, B \subseteq X$.
(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ für alle $A, B \subseteq Y$.
(c) Wenn $f(A^c) = f(A)^c$ für alle $A \subseteq X$ gilt, dann ist f bijektiv.

Aufgabe 16. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Zeige oder widerlege:

1. $g \circ f$ surjektiv $\implies$ f surjektiv
2. $g \circ f$ surjektiv $\implies$ g surjektiv
3. $g \circ f$ injektiv $\implies$ f injektiv
4. $g \circ f$ injektiv $\implies$ g injektiv