Aufgabe 17. Sei $f : X \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung, die jedem $x \in X$ eine Teilmenge $f(x) \subseteq X$ zuordnet.

(a) Zeige, daß die Menge $U = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ nicht im Bildbereich von f liegen kann.

(b) Zeige: Es gibt keine surjektive Abbildung $X \to \mathcal{P}(X)$ und keine injektive Abbildung $\mathcal{P}(X) \to X$.

Aufgabe 18. Untersuche die folgenden linearen Gleichungssysteme auf Lösbarkeit und bestimme, wenn möglich, alle Lösungen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & & & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & = & 2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & & & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & = & -5 \end{array}$$

Hinweis: Beide Systeme können simultan behandelt werden.

Aufgabe 19. Für welche Werte von α, $\beta \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & \beta \\ x_1 & + & 2x_2 & + & \alpha x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

keine/eine eindeutige/unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 20. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} - x_n &= 1 \\ \alpha x_n - x_1 &= \beta \end{aligned}$$

keine/eine eindeutige/unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 21. Zeige mittels Vektorrechnung, daß die Schwerlinien eines Dreiecks (auch *Seitenhalbierende* genannt) einander in einem Punkt schneiden und bestimme diesen Punkt.

Aufgabe 22. Gegeben sei eine Ebene e, eine Gerade g und ein Punkt P. Finde die Parameterdarstellung derjenigen Geraden, die zu e parallel ist, durch P geht und g in einem Punkt schneidet.

$$e = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \qquad g = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad P = (1, 1, 2)$$