

Aufgabe 23. Welche der folgenden Strukturen (X, \circ) sind Halbgruppen, Monoide, Gruppen? Bestimme ggf. neutrale und inverse Elemente und untersuche, ob die Verknüpfungen kommutativ sind.

- (1) $X = \mathbb{R}^+$, Verknüpfung $a \circ b = |a - b|$
- (2) $X = \mathbb{R}$, Verknüpfung $a \circ b = \min(a, b)$
- (3) $X = \mathbb{R}$, Verknüpfung $a \circ b = |a|b$
- (4) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, Verknüpfung $(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d)$

Aufgabe 24. Sei X eine Menge. Zeige, daß die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ mit der Verknüpfung

$$A \circ B = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

eine Gruppe bildet.

Aufgabe 25. Zeige: Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, d.h., mit der Ziffernentwicklung $n = \sum_{i \geq 0} a_i 10^i$ gilt

$$11 \text{ teilt } n \iff 11 \text{ teilt } \sum_{i \geq 0} (-1)^i a_i$$

Aufgabe 26. Bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der Gleichungen

- (a) $6x \equiv 3 \pmod{9}$
- (b) $6x \equiv 4 \pmod{9}$
- (c) $4x + 3 \equiv 1 \pmod{7}$
- (d) $4x + 5 \equiv 2 \pmod{9}$

Aufgabe 27. (a) Erstelle die Verknüpfungstafel der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_3 .

(b) Rechne nach, daß die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto 1 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto -1 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto -1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto 1 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto 1 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto -1 \end{array}$$

von $(\mathfrak{S}_3, \circ) \rightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.