Aufgabe 28. (a) Sei $h : G_1 \to G_2$ ein Isomorphismus zwischen zwei Gruppen G_1 und G_2. Zeige, daß $h^{-1} : G_2 \to G_1$ ebenfalls ein Homomorphismus ist.
(b) Sei X eine Menge von Gruppen[1]. Zeige, daß durch

$$G \simeq G' :\Longleftrightarrow G \text{ und } G' \text{ sind isomorph}$$

eine Äquivalenzrelation auf X erklärt wird.

Aufgabe 29. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} f : G &\to G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

bijektiv ist und daß f ein Automorphismus ist genau dann, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 30. Sei $h : G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus und $H_2 \subseteq G_2$ eine Untergruppe. Zeige, daß $h^{-1}(H_2)$ eine Untergruppe von G_1 ist.

Aufgabe 31. Eine abelsche Gruppe heißt *einfach*, wenn sie keine nichttrivialen Untergruppen besitzt. Zeige, daß $(\mathbb{Z}_n, +)$ einfach ist genau dann, wenn $n \in \mathbb{P}$ (Primzahl).

Aufgabe 32. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $x \in G$ ein fixes Element. Zeige, daß $(G, \odot)$ mit der Operation

$$a \odot b := a \circ x \circ b$$

eine zu $(G, \circ)$ isomorphe Gruppe ist.

Aufgabe 33. Zeige, daß $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) &:= (a_1 b_1 + a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

einen kommutativen Ring bildet und bestimme Einselement, Nullteiler und invertierbare Elemente.

[1] Die „Menge aller Gruppen“ existiert nicht!